This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

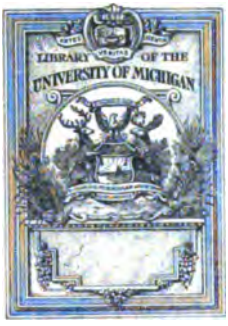
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



FROM THE LIBRARY OF
Professor Karl Heinrich Rau
OF THE UNIVERSITY OF HEIDELBERG
PRESENTED TO THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
BY
Mr. Philo Parsons
OF DETROIT
1871

MATHEMATICS
QA
39
.M211
1808

10799

Mathematisches Lehrbuch

zum Gebrauche öffentlicher Vorlesungen

auf der churfürstl. baierischen Landes-Universität zu Landshut,

verfaßt vom

Maurus Magold,

Benedictiner von Tegernsee, churfürstl. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor der Mathematik allda.

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

II. Theil,

welcher die Elementar-Geometrie, und Trigonometrie enthält

mit 11 Kupfern, und 2 gedruckten Tabellen.

Mit Censurfreyheit der churfürstl. Landes-Universität.

Landshut

bey Anton Weber,

1803.

C . R a u .

Lehrbuch
der
Elementar-Geometrie
und
Trigonometrie
zum Gebrauche
öffentlicher Vorlesungen
auf der
churfürstl. baierischen Landes-Universität
in Landshut,

verfaßt vom
Maurus Magold,
Benedictiner von Tegernsee, churfürstl. geistl. Rathe
und öffentl. ordentl. Professor der Mathematik allda.

Mit 11 Kupfern, und 2 gedruckten Tabellen.

Mit Censurfreyheit der churfürstl. Landes-Universität.

Landshut
bey Anton Weber.
1803.

Inhalt.

Geometrie.

Seite

Einleitung: Vom Objecte, und den Theilen der Geometrie. 1

I. Theil. Die Longimetrie.

I. Hauptstück: Erste Begriffe und Lehrsätze. 6

I. Abschnitt von geradlinigten Winkeln u. Figuren. 6

II. Abschnitt vom Kreise. 14

II. Hauptstück von der Lage und Größe gerader Linien. 20

I. Abschnitt von der Lage und Größe gerader Linien in Dreyecken. 20

II. Abschnitt von Parallellinien. 49

III. Abschnitt von der Lage und Größe gerader Linien in Vierecken. 51

IV. Abschnitt von der Lage und Größe gerader Linien in Vielecken. 59

V. Abschnitt von der Lage und Größe gerader Linien im Kreise. 63

I. Von der Lage der Radien, und dem Maaße der Winkel. 63

II. Von der Größe und Lage der Sehnen und Tangenten. 73

III. Hauptstück von Verhältnissen gerader Linien. 83

Seite

I. Abſchnitt von Verhältniſſen gerader Linien in geradlinigten ebenen Figuren. 83
II. Abſchnitt von Verhältniſſen gerader Linien im Kreiſe. 100
IV. Hauptſtück von der Lage und den Verhältniſſen der Kreislinien. 106
I. Abſchnitt von der Lage der Kreislinien gegen einander in einer Ebene. 106
II. Abſchnitt von den Verhältniſſen der Kreislinien. 114

II. Theil. Die Planimetrie.

I. Hauptſtück von der Gleichheit und Verwandlung der Figuren. 130
II. Hauptſtück von Verhältniſſen und Ausmeſſung der Figuren. 147
III. Hauptſtück von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und verſchiedener Ebenen gegeneinander. 163
IV. Hauptſtück Practiſche Geometrie, oder Anwendung der Geometrie auf die Feldmeßkunſt. 184
I. Abſchnitt vom Gegenſtande der Feldmeßkunſt. 184
II. Abſchnitt von Abſteckung gerader Linien und Winkel auf dem Felde, nebſt Vermeſſung der erſtern. 188
III. Abſchnitt von Meſſung unzugänglicher Weiten mit bloßen Stäben. 200
IV. Abſchnitt von der Ausmeſſung unzugänglicher Weiten mit dem Meßtiſche. . . . 208
V. Abſchnitt von den Methoden vermittels Stäbe eine Figur auf dem Felde in Grund zu legen. 217

Seite

VI. Abſchnitt von den Methoden, vermittelſt des Meßtiſches eine Figur auf dem Felde in Grund zu legen. 222
VII. Abſchnitt von Ausmeſſung, und Vertheilung der Felder. 234

III. Theil. Die Stereometrie.

I. Hauptſtück von körperlichen Winkeln, und von Körpern überhaupt. 243
II. Hauptſtück von der Gleichheit, und den Verhältniſſen der Körper. 254
I. Abſchnitt vom Prisma und dem Cylinder. 254
II. Abſchnitt von der Pyramide und dem Kegel. 262
III. Abſchnitt von der Kugel. 271
III. Hauptſtück von Ausmeſſung der Körper, und ihrer Oberflächen. 282
I. Abſchnitt vom Prisma, und dem Cylinder. 282
II. Abſchnitt von der Pyramide, und dem Kegel. 290
III. Abſchnitt von der Kugel. 297
IV. Hauptſtück von Viſierſtäben. 306

Trigonometrie.

Einleitung: Vom Gegenſtande der Trigonometrie. 318
I. Hauptſtück von den Verhältniſſen trigonometriſcher Linien. 321
I. Abſchnitt von den Verhältniſſen trigonometriſcher Linien einfacher Bögen und Winkel. 321
II. Abſchnitt von den Verhältniſſen trigonometriſcher Linien zuſammengeſetzter Bögen und Winkel für den Halbmeſſer 1. . . . 342

Seite

III. Abſchnitt von trigonometriſchen Tafeln. 357

II. Hauptſtück. Die ebene Trigonometrie. 373

I. Abſchnitt von rechtwinklichten und gleichwinklichten Dreyecken. 373

II. Abſchnitt von Dreyecken überhaupt. 382

III. Abſchnitt von geradlinigten Figuren überhaupt. 399

III. Hauptſtück. Trigonometriſche Feldmeßkunſt. 410

I. Abſchnitt von Ausmeſſung der Winkel. 419

II. Abſchnitt von trigonometriſchen Vermeſſungen der Weiten, Höhen und Flächen. 421

III. Abſchnitt vom Nivelliren. 429

IV. Hauptſtück. Die ſphäriſche Trigonometrie. 445

I. Abſchnitt von ſphäriſchen Dreyecken, ihren Winkeln und Seiten überhaupt. 445

II. Abſchnitt von rechtwinklichten Dreyecken. 454

III. Abſchnitt von der Natur ſchiefwinklichter Dreyecke überhaupt. 465

IV. Abſchnitt von der Auflöſung ſchiefwinklichter Dreyecke. 487

Geometrie.

Einleitung.

Vom Objecte, und den Theilen der Geometrie.

§. 1.

Erklärungen:

a. Eine stetige Größe (§. 1. Arithm.), deren Theile außerhalb einander sind, heißt **ausgedehnt**, und

b. Die Wissenschaft von stetigen ausgedehnten Größen heißt **Geometrie** (§. 3. Arithm.)

Zusatz: Da es außer Zeit und Raum keine andere ausgedehnte stetige reine Größen giebt, so macht die Ausdehnung der Zeit und des Raumes den Gegenstand der **reinen Geometrie** aus.

§. 2.

Erklärungen:

a. Ein allenthalben, oder völlig begränzter Raum heißt ein **geometrischer Körper**,

b. Die Ausdehnung des Körpers an seinen Gränzen, heißt eine **geometrische Fläche.**

c. Die Ausdehnung der Fläche an ihren Gränzen heißt eine **geometrische Linie**, und

d. die Gränze einer Linie ein **geometrischer Punct.**

I. **Zusatz:** Ein Körper besteht nicht aus Flächen: denn die Gränze eines Dinges (§. 294. Ar.) ist nicht ein Bestandtheil, sondern das Aufhören desselben; eben so besteht eine Fläche nicht aus Linien, und eine Linie nicht aus Puncten.

II. **Zusatz:** Der geometrische Körper hat drey Dimensionen, nach Länge, Breite und Höhe; eine Fläche hat zwey Dimensionen, nach Länge und Breite; eine Linie hat nur eine Dimension nach Länge; der Punct hat gar keine Dimension oder Ausdehnung.

III. **Zusatz:** Die Zeit hat nur eine Dimension nach Länge, sie ist also durch eine Linie, mithin durch eine Dimension des Raumes darstellbar, folglich ist die reine Geometrie die **Wissenschaft des Raumes.**

§. 3.

§. 3.

Erklärungen:

a. Die Ordnung, in welcher ein Theil des Raumes sammt seiner Gränze neben andern ist, heißt seine **Stelle** im Raume, oder sein **Ort** (locus);

b. Die Bestimmung des Ortes, heißt seine **Lage** (positio).

§. 4.

Erklärungen:

a. Eine Linie heißt gerad (linea recta), wenn alle Theile einerley Richtung haben, und

b. krumm (curva), wenn kein Theil derselben gerade ist.

§. 5.

Postulate.

a. Von einem Puncte A. (Fig. 2.) zum andern B ist allemal eine gerade Linie möglich;

b. Jede gerade Linie A B kann durch ihre Endspuncte A, B nach beyden Seiten ohne Ende verlängert werden.

§. 6.

Axiom.

a. Von einem Puncte A zum andern B ist nur eine gerade Linie möglich.

b. Sie ist zwischen beyden ~~Linien~~ die kürzeste Linie | Punkten

I. Zusatz: Durch zwey Puncte ist die Lage einer geraden Linie, und

II. Zusatz: durch die Endespuncte zugleich die Größe derselben bestimmet.

III. Zusatz: Zwey gerade Linien durchschneiden einander nur in einem Puncte.

§. 7.

Erklärungen:

a. Eine Fläche heißt **eben** (superficies plana), oder **eine Ebene** (planum), wenn jede gerade Linie, die man von irgend einem Puncte derselben zu einem andern in ihr ziehet, ganz in der Fläche liegt;

b. Eine Fläche heißt **krumm**, wenn kein Theil von ihr eben ist.

Anmerkung: Aus diesen folget die Eintheilung der Geometrie in die **Elementar-**; und **höhere Geometrie** (§. 5. Arithm.).

§. 8.

Erklärungen:

a. Jener Theil der Geometrie, in welchem die Lage, Größe und Verhältnisse der Linien bestimmet werden, heißt **Longimetrie.**

b. Jener Theil, in welchem von der Größe und den Verhältnissen der Flächen gehandelt wird, und in

inwieferne man größten Theils auf Ebenen sich einschränkt, heißt Planimetrie.

c. Jener Theil, welcher von Körpern handelt, heißt Stereometrie.

Anmerkung: In der Longimetrie und Planimetrie wird immer vorausgesetzet, daß sich alle Linien in einer und eben derselben Ebene befinden.

§. 9.

Lehrsatz:

Ausgedehnte Größen, die einander decken, sind congruent.

Beweis:

Denn wenn sie einander decken, so haben alle Theile einerley Größen und Lage, folglich einerley Quantität und Qualität, und sind also congruent. (§. 1. Arithm.).

I. Zusatz: Congruente Größen decken einander.

II. Zusatz: Congruente Größen sind einerley, und lassen sich für einander setzen.

III. Zusatz: Zwey gleich lange gerade Linien sind congruent, und umgekehrt.

I. Theil.

Die Longimetrie.

I. Hauptstück.

Erste Begriffe und Lehrsätze.

I. Abschnitt.

Von geradlinigten Winkeln und Figuren.

§. 10.

Erklärungen:

a. Die Neigung zweyer gerader Linien AC, BC (Fig. I.) in einem Puncte C heißt ein ebener geradlinigter Winkel, oder kurz ein Winkel (angulus);

b. die beyden Linien AC, BC, heißen die Schenkel (crura), und

c. der Punct C, in welchem die Linien zusammen treffen, heißt der Scheitel (vertex).

d.

d. Die Bezeichnung des Winkels geschieht entweder durch den Buchstaben am Scheitel, oder durch einen kleinern zwischen die Schenkel gesetzten Buchstaben, oder durch die drey Buchstaben an den Schenkeln so, daß der Buchstab vom Scheitel in die Mitte zu stehen kömt. Z. B. den Winkel der Linien AC, BC bezeichnet man mit c, oder x; oder ACB, oder BCA.

I. Zusatz: Die Größe des Winkels bleibt unverändert, wenn man die Schenkel desselben nach Belieben kürzer oder länger machet.

II. Zusatz: gleiche Winkel decken einander, sind also congruent (§. 9.).

III. Zusatz: Der Schenkel AC kann gegen BC jede beliebige, mithin auch so eine Lage haben, daß (Fig. 2) AC mit BC in eine gerade Linie AB fällt, man heißt so einen Winkel ACB einen geraden.

§. 11.

Erklärungen:

a. Wenn zwey Winkel x, y (Fig. 3.) einen Schenkel CD gemein haben, die beyden andern Schenkel AC, BC in einer geraden Linie liegen, so heißen sie **Nebenwinkel** (anguli contigui, seu deinceps positi).

b. Sind die beyden Nebenwinkel ungleich, so heißt jeder davon ein **schiefer Winkel** (obliquus).

c. Sind sie gleich, so heißt jeder von ihnen (Fig. 4.) ein **rechter** (rectus), das ist $m = n = R$, und DC steht auf AB **senkrecht, lothrecht, perpendiculär**;

I. Zusatz: Zwey Nebenwinkel $x + y$ (Fig. 3.), oder $m + n$ (Fig. 4.) sind zusammen dem geraden Winkel ACB gleich.

II. Zusatz: Zwey Nebenwinkel sind zusammen zweyen rechten gleich, das ist $x + y = 2\,R$;
Denn $x + y = ACB$; $m + n = ACB$ (I. Zus.), mithin $x + y = m + n = 2\,R$ (Erkl.)

III. Zusatz: Alle Winkel, die auf einer Seite von AB (Fig. 5.) im Scheitel C möglich sind, sind zusammen so groß, als zwey rechte, das ist
$m + n + o = 2\,R$; denn $m + n + o = ACB = 2R$ (II. Zus.)

IV. Zusatz: Alle Winkel, die um einen Punct C ringsum in einer Ebene möglich sind, halten zusammen vier rechte; das ist $m + n + o + u + x + y + z = 4\,R$.

Denn $\left.\begin{matrix} m + n + o = 2R \\ u + x + y + z = 2R \end{matrix}\right\}$ (III. Zus.), folglich

$m + n + o + u + x + y + z = 4R$.

V. Zusatz: Wenn zwey Winkel ACD, BCD (Fig. 6.) den Schenkel CD gemein haben, und zusammen zweyen rechten gleich sind, so sind sie Nebenwinkel, das ist, so liegt CA in der Verlängerung von BC.

Denn

Denn wäre nicht CA, sondern entweder CE, oder CF die Verlängerung von BC, so müßte

im ersten Falle	im zweyten Falle
ECD+BCD=2R;	FCD+BCD=2R (II. Zus.)
ACD+BCD=2R;	ACD+BCD=2R (ex hyp.)
Also	
ECD+BCD=ACD+BCD;	FCD+BCD=ACD+BCD
Folglich ECD=ACD;	FCD=ACD

welches aber unmöglich ist (§. 19. 3. Arithm.).

§. 12.

Erklärungen:

a. Ein Winkel, der größer als ein gerader, oder zwey rechte Winkel ist, heißt ein erhabener Winkel (convexus),

b. Ein Winkel, der kleiner als ein gerader, oder zwey rechte Winkel ist, heißt ein hohler (concavus), so ist (Fig. 1.) x ein hohler, hingegen ACB auf der andern Seite ein erhabener Winkel.

α. Ein hohler Winkel y (Fig. 3.), der kleiner ist, als ein rechter, heißt spitzig (acutus);

β. Ist solcher wie x größer, als ein rechter Winkel, so heißt er stumpf (obtusus).

Anmerkung. Unter Winkel ohne Beysatz versteht man allemahl einen hohlen.

§. 15.

Erklärungen:

a. Eine nach allen Seiten begränzte Fläche heißt eine **Figur**, und zwar

α. eine **ebene**, wenn die Fläche eben,

β. eine **krumme**, wenn die Fläche krumm ist.

b. Die ganze Gränze der Figur heißt ihr **Umfang**, oder **Perimeter**, und wenn die Gränze nur aus einer einzigen krummen Linie besteht, so heißt solche die **Peripherie**.

c. Besteht der Umfang aus mehrern Linien, so heißen

α. die einzelnen Linien **Seiten**,

β. die Winkel dieser Seiten die **Ecke**,

γ. eine Linie von einer Ecke zur andern, ohne daß solche mit einer Seite zusammen fällt, eine **Diagonallinie** oder **Diagonal**. z. B. (Fig. 8.) sind AB, BC, CD u. s. f. die Seiten, A, B, C u. s. f. die Ecke, AC eine Diagonal.

d. Figuren heißen

α. **geradlinigt**, wenn alle ihre Seten gerade Linien sind,

β. **krummlinigt**, wenn eine oder mehrere Seiten krumme Linien sind.

I. Zusatz: Zwey gerade Linien geben keine Figur; denn sie durchschneiden sich nur in einem Puncte. (§. 6.

III.

§. 14.

Erklärungen:

a, Der 90ste Theil eines rechten Winkels heißt ein Grad,

b, der 60ste eines Grades eine Minute,

c, der 60ste einer Minute eine Secunde,

d, Man bezeichnet Grade, Minuten, Secunden dadurch, daß man rechts oben an die Zahlen die Zeichen (°, ′, ″) setzet, so heißt z. B. 15° 48′ 36″ 15 Grade, 48 Minuten, 36 Secunden.

I. Zusatz: Ein rechter Winkel hält 90°, ein gerader 180°, ein erhabener ist größer, und ein hohler kleiner als 180°; ein stumpfer ist größer, und ein spitziger Winkel kleiner als 90°, (§. 12.)

II. Zusatz: Zwey Nebenwinkel halten zusammen 180° (§. 11. II. Zus.), wenn also einer davon bekannt ist, so ist auch der andere gegeben.

III. Zusatz: Alle Winkel um einen Punct C (Fig. 5.) auf einer Seite von AB halten zusammen 180°, und alle Winkel rings um einen Punct C halten in einer Ebene zusammen 360° (§. 11. III. u. IV. Zus.).

Anmerkung: Nach der neuen französischen Eintheilung wird der rechte Winkel in 100 Grade, ein Grad in 100 Minuten, eine Minute in 100 Secunden getheilt.

§. 15.

§. 15.

Erklärungen:

a. Eine nach allen Seiten begränzte Fläche heißt eine **Figur**, und zwar

α. eine **ebene**, wenn die Fläche eben,

β. eine **krumme**, wenn die Fläche krumm ist.

b. Die ganze Gränze der Figur heißt ihr **Umfang**, oder **Perimeter**, und wenn die Gränze nur aus einer einzigen krummen Linie besteht, so heißt solche die **Peripherie**.

c. Besteht der Umfang aus mehrern Linien, so heißen

α. die einzelnen Linien **Seiten**,

β. die Winkel dieser Seiten die **Ecke**,

γ. eine Linie von einer Ecke zur andern, ohne daß solche mit einer Seite zusammen fällt, eine **Diagonallinie** oder **Diagonal**. z. B. (Fig. 8.) sind AB, BC, CD u. s. f. die Seiten, A, B, C u. s. f. die Ecke, AC eine Diagonal.

d. Figuren heißen

α. **geradlinigt**, wenn alle ihre Seten gerade Linien sind,

β. **krummlinigt**, wenn eine oder mehrere Seiten krumme Linien sind.

I. **Zusatz**: Zwey gerade Linien geben keine Figur; denn sie durchschneiden sich nur in einem Puncte. (§. 6. III.

III. Zuſ.); es giebt alſo keine geradlinigte Figur mit zwey Seiten.

II. Zuſatz: Eine geradlinigte Figur hat ſo viele Ecke oder Winkel, als ſie Seiten hat. Denn die erſte Seite AB macht mit der zweyten Seite BC das erſte Eck B, die zweyte mit der dritten Seite das zweyte Eck C, die dritte mit der vierten das 3te Eck u. ſ. f., und am Ende die letzte Seite mit der erſten das letzte, das iſt, die nte Seite mit der erſten das nte Eck.

§. 16.

Eintheilung.

Eine geradlinigte Figur iſt

a. in Rückſicht der Anzahl ihrer Seiten, oder Ecke.

α. ein Dreyeck (triangulum ſeu trigonum), wenn ſie aus drey Seiten und Ecken,

β. ein Viereck (tetragonum), wenn ſie aus vier,

γ. ein Vieleck (polygonum), wenn ſie aus mehr als vier Seiten und Ecken beſteht.

b. in Rückſicht der Verhältniſſe der Seiten und Winkel

α. eine reguläre Figur, wenn alle Seiten in ihr, und alle Winkel gleich ſind,

β. eine irreguläre Figur, wenn entweder die Seiten, oder die Winkel, oder beyde ungleich ſind.

II. Abschnitt.

Vom Kreise.

§. 17.

Erklärungen.

a. Eine krumme Linie, welche eine Ebene so begränzet, daß (Fig. 9.) alle gerade Linien aus ihr nach einem Puncte C dieser Ebene gleich sind, heißt eine **Kreislinie**, oder die **Peripherie** des Kreises (circumferentia).

b. Die begränzte Ebene die **Kreisebene**, oder der **Kreis** (circulus), und

c. der Punct C der **Mittelpunct** (centrum).

d. Jede vom Mittelpuncte an die Peripherie gezogene gerade Linie CD, CE ein **Halbmesser** (radius).

e. eine gerade Linie IK von einem Puncte der Peripherie I zum andern K eine **Sehne** (Chorda), und

f. wenn solche durch den Mittelpunct wie DE geht, ein **Durchmesser** (Diameter).

I. Zusatz: Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich.

II. Zusatz: Der Durchmesser ist zwey Halbmessern gleich.

III. Zusatz: Jede Sehne theilet den Kreis in zwey Theile, die auf verschiedenen Seiten der Sehne liegen.

IV.

IV. Zusatz: Ein Durchmesser theilet sowohl den Kreis als die Kreislinie in zwey congruente Theile. Denn man lege den untern Theil des Kreises auf den obern, so hat der Bogen DFE mit dem Bogen DGE den nemlichen Anfangspunct D und Endepunct E, und alle dazwischen liegende Puncte vom untern Bogen fallen auf Puncte vom obern, weil sie sonst dem Mittelpuncte C näher, oder mehr davon entfernt seyn müßten, als um den Halbmesser CD; mithin decken sich die Bögen und die Theile vom Kreise, und sind daher congruent (§. 9.).

V. Zusatz: Eine gerade Linie AB, die einen Punct H innerhalb, und einen Punct A außerhalb dem Kreise hat, durchschneidet die Kreislinie wenigstens in einem Puncte K. Denn da die Kreislinie einen geschlossenen Raum bildet, so kann die gerade Linie von H nach A nicht ununterbrochen gehen, ohne irgendwo die Kreislinie, z. B. in K zu durchschneiden.

§. 18.

Postulat.

Um ein Punct C mit dem Halbmesser CD in einer Ebene einen Kreis zu beschreiben.

Anmerkung. Wenn der Zirkel (circinus) ein Instrument mit dem einem Schenkel um C gedreht wird, so beschreibt der andere Schenkel in einer beliebigen Oeffnung einen Kreis; auf diese Art erhält man die Zeichnung einer Kreislinie.

§. 19.

§. 19.

Aufgabe:

Um den Mittelpunct C einen Kreis zu beſchreiben, den eine unbegränzte gerade Linie AB in zwey Puncten I und K durchſchneidet.

Auflöſung:

Man nehme in der Linie AB einen beliebigen Punct H, und ziehe CH; mit der Oeffnung CE > CH beſchreibe man um C einen Kreis, ſo wird ſolcher die unbeſtimmte Linie AB in zwey Puncten I und K durchſchneiden.

Beweis:

1. Man verlängere CH beyderſeits bis zur Peripherie, ſo iſt DE ein Diameter (§. 17. f.), und
2. theilet alſo die Peripherie in 2 gleiche Theile DGE, und DFE, (§. 17. IV. Zuſ.)
3. Der Punct D von der Peripherie liegt auf einer, und der Punct E auf der andern Seite der Linie AB.
4. Nun kann im Halbkreiſe DGD, die Kreislinie von D nicht ununterbrochen nach E gehen, ohne die dazwiſchen liegende Linie AB in irgend einem Puncte I zu durchſchneiden, und
5. eben ſo muß im andern Halbkreiſe DFE die Kreislinie von D bis E die dazwiſchen liegende gerade AB in einem Puncte K durchſchneiden.

I. Zuſatz: Eine gerade Linie AB, die einen Punct H innerhalb dem Kreiſe hat, ſchneidet die Peripherie des Kreiſes verlängert in zwey Puncten I, K. Denn wenn H im Mittelpuncte C läge, ſo iſt die Linie verlängert ein Diameter, der offenbar die Kreislinie in zwey Puncten durchſchneidet; liegt aber H auſſer dem Mittelpuncte, ſo ziehe man durch H den Diameter DE, nun liegt ein Theil der Linie AB im Halbkreiſe DGE, der andere im Halbkreiſe DFE, da nun jeder Theil verlängert werden kann, bis auſſer dem Kreiſe, ſo muß einer die Kreislinie in I, der andere in K durchſchneiden.

II. Zuſatz: Wenn ein Kreis um A (Fig. 10.) einen Punct D ſeiner Peripherie innerhalb, und einen andern C auſſerhalb dem Kreiſe um B hat, ſo haben die beyden Kreislinien zwey Puncte G, H gemein, die auf verſchiedenen Seiten der Sehne CD liegen. Denn die Sehne CD theilet den Kreis um A in zwey Theile, die auf verſchiedenen Seiten derſelben liegen (§. 17. III. Zuſ.). Nun kann die Kreislinie um A vom Puncte D inner dem Kreiſe um B, zum Puncte C auſſer dieſem Kreiſe nicht ſtetig kommen, ohne auf jeder Seite der Sehne CD die Kreislinie um B in einem Puncte zu durchſchneiden, das iſt, beyde Kreislinien haben auf einer Seite von CD den Punct G, auf der andern den Punct H gemein.

II. Hauptstück.

Von der Lage und Größe gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Dreyecken.

§. 22.

Erklärungen:

a. Ein Dreyeck (Fig. 11.) heißt **ungleichseitig** (triangulum scalenum), wenn die drey Seiten ungleich,

b. **gleichschenklicht** (aequicrurum), wenn (Fig. 12.) zwey Seiten AC, BC, die man seine **Schenkel** nennet, gleich,

c. **gleichseitig** (aequilaterum), wenn (Fig. 13.) alle drey Seiten gleich sind.

d. Nimmt man eine Seite z. B. AB als die **Basis** oder Grundlinie an, so heißt die entgegenstehende Ecke C die **Spitze** des Dreyeckes.

e. Im gleichschenklichten Dreyecke (Fig. 12.) versteht man gewöhnlich unter Spitze die Ecke C, welche von den gleichen Schenkeln AC, BC, eingeschlossen wird,

II. Der Punct D kann zwischen B und F, oder
III. zwischen A und B liegen.

7. In den beyden ersten Fällen liegt immer D innerhalb dem Kreise um B.

8. Im dritten Falle liegt nun D auf der nemlichen Seite von B, wo der Punct E liegt Nr. 3.

9. Nun kann aber D mit E nicht zusammen fallen, weil sonst $AD + BE = AB$ seyn müßte, gegen die Annahme,

10. Eben so kann D nicht zwischen A und E liegen, weil $AD + EB < AB$ seyn müßte gegen die Annahme, folglich muß

11. der Punct D im dritten Falle zwischen B und E, mithin auch innerhalb dem Kreise um B liegen; also hat

12. Der Kreis um A einen Punct C außerhalb Nr. 2, und einen Punct D innerhalb dem Kreise um B. Nro. 7 und 11., folglich

13. durchschneidet die Kreislinie desselben die Kreislinie um B in zwey Punctrn G, H, die auf verschiedenen Seiten von CD (§. 19. II. Zus.), folglich auch auf verschiedenen Seiten der Centrallinie AB liegen.

Zusatz: Wenn zwey Kreislinien in einer Ebene gleiche Radien haben, und jeder von ihnen entweder der Centrallinie gleich, oder größer als ihre Hälfte ist, so haben sie einen Punct über derselben, und einen Punct unter derselben gemein; denn in beyden Fällen ist allemal die Summe zweyer solcher Linien größer als die dritte dieser Linien.

3 Linien einander gleich, so bekömt man das gleichseitige Dreyeck (Fig. 13.).

II. Zusatz: Will man (Fig. 12.) über eine gegebene Linie AB ein gleichschenklichtes Dreyeck verzeichnen, so darf man nur aus A und B mit einem Halbmesser, der größer als die Hälfte von AB ist, Kreise beschreiben, und von ihrem Durchschnittspuncte C über AB die geraden Linien AC, BC ziehen (§. 21. Zus.) — Auf die nemliche Art kann man auch auf die untere Seite von AB ein gleichschenklichtes Dreyeck verzeichnen.

§. 24.

Lehrsatz:

Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gleich sind, so sind die Dreyecke congruent, und die dritte Seite, nebst den beyden anliegenden Winkeln sind auch gleich, das ist (Fig. 13.), wenn AC = ac; BC = bc; C = c; so ist AB = ab; A = a; B = b; △ ACB ≅ △acb.

Beweis:

1. Man lege c auf C, ca längst CA, so decken beyde Seiten einander (§. 9. III. Zus.), oder a fällt auf A.

2. Da c = C, so congruiren sie (§. 10. II. Zus.), mithin fällt cb längst CB, wenn man die Dreyecke aufeinander, und nicht neben einander leget, und

wird, und die opponirte Seite AB heißt daher die **Grundlinie.**

Zusatz: In congruenten Dreyecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten entgegen, das ist, wenn (Fig. 13.) $\triangle ABC \equiv \triangle abc$ (§. 18. Nr. 4. Arithm.), so muß, wenn $AB = ab$ ist, auch $C = c$; und umgekehrt, wenn $A = a$ ist, so muß auch $BC = bc$ seyn. Denn sonst wären die Dreyecke in etwas verschieden, gegen die Natur der Congruenz (§. 1. a. Arithm.).

§. 23.

Aufgabe:

Aus drey gegebenen Linien AB, BC, AC (Fig. 11.), von welchen allemal 2 zusammen größer, als die dritte sind, ein Dreyeck zu verzeichnen.

Auflösung:

1. Man nehme eine davon, z. B. AB als Grundlinie,
2. aus A beschreibe man mit dem Halbmesser AC, und
3. aus B mit dem Halbmesser BC Kreise, so werden sich diese
4. in einem Puncte C über AB durchkreuzen (§. 21.),
5. Man ziehe also die geraden Linien AC, BC, so ist ACB das verlangte Dreyeck.

I. **Zusatz:** Im Falle $AC = BC$ gegeben ist, so wird das Dreyeck gleichschenklicht wie (Fig. 12.), sind alle

fällt cb längſt CA (§. 10. II. Zuſ.), und b auf A, mithin decken ſich in dieſer Lage ebenfalls alle Seiten und Winkel; alſo iſt

5. $a = B$; ferner $a = A$; Nro. 2., folglich $B = A$.

I. Zuſatz: Im gleichſchenklichten Dreyecke ſind die beyden Winkel an der Grundlinie einander gleich.

II. Zuſatz: Im gleichſeitigen Dreyecke ſind alle drey Winkel gleich.

III. Zuſatz: Das gleichſeitige Dreyeck iſt eine regulâre Figur (§. 16. b.).

§. 26.

Lehrſatz:

Wenn in zwey Dreyecken eine Seite nebſt den beyden anliegenden Winkeln gleich iſt, ſo ſind auch die übrigen zwey Seiten, und der dritte Winkel gleich, und die Dreyecke ſind congruent; das iſt, wenn $AB = ab$; $A = a$, $B = b$, ſo iſt
$AC = ac$, $BC = bc$; $c = C$; $\triangle ACB \overline{\sim} \triangle acb$.

Beweis:

1. Man lege a auf A, ab längſt AB, ſo fällt
2. b auf B. (§. 9. III. Zuſ.) und
3. ac längſt AC, und bc längſt BC (§. 10. II. Zuſ.), wenn doch die Dreyecke nicht neben-, ſondern aufeinander geleget werden.
4. Nun liegt c in der Linie ac, mithin in der Richtung AC.

5. c liegt aber zugleich in der Linie bc, mithin in der Richtung BC, folglich

6. in jenem Puncte, wo die beyden Linien AC, BC einander durchschneiden, das ist in C. (§. 6. III. Zus.), also

8. decken sich ac, AC, und bc, BC, die Winkel c und C, so wie die ganzen Dreyecke, folglich sind erstere gleich, und die Dreyecke congruent (§. 9.).

Zusatz:

Durch eine Seite nebst den beyden anliegenden Winkeln ist ein Dreyeck vollkommen bestimmet; denn ein anderes mit eben diesen Bestimmungen ist dem gegebenen congruent, mithin mit selbem einerley.

§ 27.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel gleich sind, so sind auch die entgegenstehenden Seiten gleich, das ist, wenn $A = B$, so ist $BC = AC$.

Beweis:

1. Im Dreyecke acb sey $ab = AB$, $a = A$, $b = B$, so ist

2. $ac = AC$; $bc = BC$ (§. 26.).

3. Da nun $A = B$ (per hyp.), so ist auch $a = b = A = B$.

4. Nun lege man b auf A, ba längſt AB, ſo fällt wieder a auf B, und wenn man das △ abc nicht neben, ſondern auf △ABC leget, ſo muß

5. bc längſt AC, und ab längſt BC, mithin abermal c auf C fallen, und die Seiten ſowohl als Winkel decken wieder einander, mithin iſt

6. bc = AC; ferner bc = BC Nr. 2., folglich AC = BC.

I. Zuſatz: Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel gleich ſind, ſo iſt es gleichſchenklicht, und

II. Zuſatz: wenn alle drey Winkel gleich ſind, ſo iſt das Dreyeck gleichſeitig, und folglich eine reguläre Figur.

§. 28.

Lehrſatz:

Wenn zwey Dreyecke drey gleiche Seiten haben, ſo ſind auch ihre Winkel gleich, und die Dreyecke congruent, das iſt, wenn AB = ab, AC = ac, BC = bc, ſo iſt A = a, B = b; C = c, △ ACB ≅ △ acb.

Beweis:

1. Man lege c auf C, und bc längſt BC, ſo fällt b auf B (§. 9. III. Zuſ.).

2. Die Dreyecke lege man nicht auf, ſondern nebeneinander, ſo, daß a und A auf verſchiedenen Seiten von BC liegen, und

3.

3. ziehe die gerade Linie Aa; so kann B in Rücksicht dieser Linie 3 verschiedene Lagen haben.

I. B kann in der Linie aA liegen (Fig. 14.)
II. B kann unter Aa (Fig. 15.), oder
III. über der Linie Aa liegen (Fig. 16.).

4. In der ersten Lage (Fig. 14.) bilden beyde Dreyecke zusammen das Dreyeck ACa.

In diesem Dreyecke ist AC = ac (per hyp.), mithin auch a = A (§. 25.).

Folglich ist b = B, c = C, und △ ACB ≅ △ acb (§. 24.).

5. In der zweyten Lage (Fig. 15.) entstehen mehrere Dreyecke.

Im Dreyecke ACa ist AC = ac, also Aac = aAC (§. 25.)
im Dreyecke ABa ist AB = ab, ... Aab = aAB.
folglich Aac + Aab = aAC + aAB (§. 30. Nr. 1. Arithm.)
das ist bac = BAC, folglich wieder
b = B, c = C und △ abc ≅ △ ABC (§. 24.)

6. In der dritten Lage (Fig. 16.) ist wieder

im △ aCA; AC = ac, also Aac = aAC
im △ aBA; AB = ab; Aab = aAB } (§. 25.)
mithin Aac — Aab = aAC — aAB (§. 30. N. I. Ar.)
das ist bac = BAC, folglich auch
b = B, c = C; und △ abc ≅ △ ABC (§. 24.).

Zusatz: Durch drey Seiten ist ein Dreyeck vollkommen bestimmet; denn ein anderes Dreyeck mit eben diesen Seiten ist dem gegebenen congruent, also mit selbem einerley.

§. 29.

§. 29.

Aufgabe:

An die Linie ac (Fig. 17.) in a einen Winkel zu verzeichnen, der dem gegebenen in A gleich ist.

Auflösung:

1. Man beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis, und bestimme dadurch AB und AC.

2. Mit eben diesem Halbmesser ziehe man aus a einen Kreis, und bestimme dadurch ac.

3. Nun ziehe man die gerade Linie BC, und

4. mit eben diesem Halbmesser beschreibe man aus c einen Bogen, und bestimme den Durchschnittspunct b mit dem Nr. 2. gezogenen Kreis.

5. Von b ziehe man die geraden Linien ba, bc, so ist a der verlangte Winkel.

Beweis:

AB = ab; AC = ac Nr. 1 u. 2.; BC = bc Nr. 3. u. 4; folglich △ ABC ≅ △ abc (§. 28.) und a = A (§. 22. Zus.)

Anmerk. Da man durch die Kreise nur die Puncte B, C, b, c bestimmen will, so zieht man auch nie die ganzen Kreislinien, sondern nur Theile davon oder Bogen.

§. 30.

Aufgabe:

Einen Winkel A (Fig. 18.) in 2 gleiche Theile theilen.

Auflösung:

1. Aus A beschreibe man mit einem beliebigen Radius einen Bogen, und schneide dadurch auf den Schenkeln die gleiche Stücke AB. AC ab.

2. Mit einem Radius, der größer als die Hälfte von BC, beschreibe man aus B und C Bögen, die sich in D durchschneiden werden (§. 23. II. Zus.).

3. Von A ziehe man nach D die gerade Linie AD, so theilet solche den Winkel in zwey gleiche Theile, oder $m = n$.

Beweis:

Man ziehe die Linien BD, CD, so ist

AB = AC, N. 1. BD = CD Nr. 2., AD = AD, mithin $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ ACD (§. 28.) und $m = n$. (§. 22. Zus.)

Zusatz: Halbieret man aufs Neue jeden Theil m und n, so bekömt man nach dieser zweyten Halbierung 4, das ist 2^2 gleiche Theile, und nach einer dritten Halbierung 8 oder 2^3 gleiche Theile, folglich nach n Halbierungen 2^n gleiche Theile.

§. 31.

§. 31.

Aufgabe:

Eine gerade Linie AB (Fig. 19.) in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung:

Man beschreibe auf jeder Seite von AB ein gleichschenklichtes Dreyeck (§. 23. II. Zus.), und verbinde die Spitzen D, E durch die gerade Linie DE, so theilet solche die gegebene in zwey gleiche Theile AC = BC.

Beweis:

1. AD = BD, und AE = BE (ex constr.) DE = DE mithin △ DAE ≅ △ DBE (§. 28.) und n = m (§. 22. Zus.).

2. Da nun AD = BD; CD = CD, n = m, so ist auch △ ADC ≅ △ BDC (§. 24.) und also AC = BC. (§. 22. Zus.)

Zusatz: Durch n Halbierungen einer Linie wird solche in 2^n gleiche Theile getheilet.

§. 32.

Lehrsatz:

Wenn man in einem Dreyecke ABC (Fig. 20.) eine Seite BC verlängert; so ist der äußere Winkel ACD

gröſſer, als der innere Winkel A, welcher im Dreyecke der verlängerten Seite BC entgegen steht.

Beweis:

1. Man halbire die an der verlängerten Seite anliegende Seite AC in E.

2. Ziehe die gerade Linie BE, und verlängere solche bis F, so daß EF = BE ist, so muß

3. die gerade Linie FC zwischen AC und DC fallen, weil F zwischen A und D liegt, folglich ist

4. o < ACD.

5. Nun ist AE = EC N. 1. BE, = EF Nr. 2., E = e (§. 13. Zus.), mithin △ AEB ≅ △ CEF (§. 24.) und

6. A = o (§. 22. Zus.); o < ACD; mithin ACD < A (§. 19. N. 5. Arithm.).

I. Zusatz: Im Dreyecke ist der äußere Winkel gröſſer, als jeder von den beyden innern entgegengesetzten, von denen nemlich keiner sein Nebenwinkel ist.

Denn ACD > A (Lehrs.); Nun verlängere man die Seite AC, so ist nach eben diesem Lehrsatze BCG > B;

Es ist aber BCG = ACD (§. 13. Zus.),

Folglich ACD > B, das ist, der äußere Winkel ACD ist gröſſer, als jeder der beyden innern entgegengesetzten A, B.

II. Zusatz: Zwey Winkel in einem Dreyecke halten zusammen weniger als 2 rechte, oder 180°, das ist $A + C < 180°$.

Denn $n = n$

$A < ACD$ (Lehrs.)

mithin $A + n < n + ACD$.

Nun ist $n + ACD = 2R$ (§. 11. II. Zus.) $= 180°$ (§. 14. II. Zus.)

Folglich $A + n$, oder $A + C < 180°$.

III. Zusatz: In jedem Dreyecke sind zwey Winkel allemal spitzig; denn enthielte das Dreyeck zwey rechte, oder 2 stumpfe, oder einen rechten und einen stumpfen Winkel zugleich, so hielten zwey solche Winkel zusammen entweder 180°, oder mehr als 180° gegen den II. Zusatz.

§. 33.

Erklärungen:

a. Ein Dreyeck heißt **spitzwinklicht**, wenn alle drey Winkel spitzig sind,

b. **stumpfwinklicht**, wenn es einen stumpfen,

c. **rechtwinklicht**, wenn es einen rechten Winkel hat. Im rechtwinklichten Dreyecke heißen die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, **Perpendikel** oder **Katheten**, jene Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, die **Hypothenuse**.

d.

d. Dreyecke, die nicht rechtwinklicht sind, heißen überhaupt schiefwinklicht.

§. 34.

Lehrsatz:

Im Dreyecke steht der größern Seite der größere Winkel entgegen, das ist (Fig. 21.)

Wenn $AC > AB$, so ist $B > C$.

Beweis:

1. Man nehme auf der Seite AC die Linie $AD = AB$, so fällt D zwischen A und C., folglich, wenn man BD zieht, so ist $n < B$.

2. $n = m$ (§. 25.) mithin

3. $B > m$; ferner ist $m > C$ (§. 32. I. Zus.)

Folglich $B > C$.

I. Zusatz: Im Dreyecke steht dem größern Winkel die größere Seite entgegen, das ist,
wenn $B > C$, so ist $AC > AB$.

Denn wäre $AC = AB$ so müßte auch $B = C$ (§. 25.), und wäre $AC < AB$, so müßte $B < C$ nach dem Lehrsatze seyn, beydes gegen die Annahme.

II. Zusatz: Im Dreyecke steht der größten Seite der größte Winkel, und der kleinsten Seite der kleinste Winkel entgegen; und umgekehrt.

III. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreyecke ist die Hypothenuse, und im stumpfwinklichten Dreyecke jene

Seite die gröſste, welche dem ſtumpfen Winkel entgegen ſteht.

§. 35.

Lehrſatz:

Im Dreyecke iſt die Summe zweyer Seiten allemal gröſser, als die dritte, das iſt (Fig. 22.) AB + BC > AC.

Beweis:

1. Man verlängere die Seite CB um BD = AB, und ziehe AD, ſo iſt
2. n + m > n.
3. n = D (§. 25.) mithin n + m oder DAC > D, und
4. DC > AC (§. 34. I. Zuſ.) das iſt
   DB + BC > AC; folglich aus Nr. 1.
   AB + BC > AC.

Zuſatz: Der Unterſchied zweyer Seiten iſt im Dreyecke allemal kleiner, als die dritte Seite, denn da AB + BC > AC; ſo iſt auch AC — AB < BC, und eben ſo AC — BC < AB.

§. 36.

Lehrſatz:

Nimmt man innerhalb dem Dreyecke ABC (Fig. 23.) einen beliebigen Punkt D, und zieht aus zwey Ecken die geraden Linien AD, BD, ſo iſt

I D > C; hingegen II AD + BD < AC + BC.

Beweis von I.

Man verlängere AD bis E, so ist

$$\left.\begin{array}{l} ADB > AEB \\ AEB > C \end{array}\right\} \text{§. 32. I. Zus.), folglich}$$

$$ADB > C.$$

Beweis von II.

$AC + CE > AE$ (§. 35.)
das ist $AC + CE > AD + DE$
ferner $DE + EB > DB$; mithin

$AC + CE + EB + DE > AD + DB + DE$, folglich
$AC + CB > AD + DB$.

§. 37.

Aufgabe:

Durch den Punct D einer gegebenen Linie GH (Fig. 24.) einen Perpendikel erreichten.

Auflösung:

1. Aus D schneide man auf der gegebenen Linie die gleichen Stücke $DA = DB$ ab.
2. Errichte über AB ein gleichschenklichtes Dreyeck, und
3. Ziehe von dessen Spitze C die gerade Linie CD, welche der verlangte Perpendikel ist.

Beweis:

$DA = DB$, und $AC = BC$ Nr. 1. und 2., $CD = CD$, folglich $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (§. 28.), und $m = n$ (§. 22. Zus.) also CD lothrecht (§. 11. c.)

Anmerkung: Da man nur die Spitze C, nicht aber die Schenkel CA, CB zur Construction nöthig hat, so werden letztere nie gezogen.

Zusatz: Durch den Punct D einer Linie GH giebt es auf jeder Seite der Linie in einer Ebene nur einen Perpendikel CD; denn sollte durch D auch DE senkrecht seyn, so müßte ADE = 90° = ADC seyn, gegen (§. 19. Nr. 3. Arithm.).

§. 38.

Aufgabe.

Von einem Puncte D (Fig. 25) außerhalb der Linie GH auf sie ein Loth ziehen.

Auflösung:

1. Man nehme in der Linie einen beliebigen Punct F, und beschreibe aus D mit einem Halbmesser, der größer als D F. ist, eine Kreislinie, so durchschneidet solche die Linie GH in zwey Puncten A B (§. 19.)
2. Auf AB errichte man auf der andern Seite von D ein gleichschenklichtes Dreyeck (§. 23. II. Zus.).
3. Von der Spitze E dieses Dreyeckes ziehe man nach D die gerade Linie DE, so steht solche auf GH senkrecht.

Beweis:

AD = BD Nr. 1., AE = BE Nr. 2., DE = DE, mithin ∠ DAE ≅ △DBE (§. 28.) und n = m (§. 22. Zus.). Ferner da AD = BD, CD = CD, und n = m, so ist △DAC ≅ △ DBC (§. 24.) und

o =

$o = r$, folglich CD, oder DE auf GH senkrecht. (§. 11. c.)

I. Zusatz: Von einem Puncte D außer GH, giebt es nur einen Perpendikel DC; denn wäre DA ebenfalls senkrecht, so enthielt das Dreyeck DAC zwey rechte Winkel gegen (§. 32. II. Zus.).

II. Zusatz: Der Perpendikel DC ist die kürzeste Linie, die vom Puncte D auf GH gezogen werden kann; denn jede andere Linie $AD > DC$ (§. 34. III. Zus.); man heißt daher DC auch die Entfernung des Punctes D von GH.

III. Zusatz: Wenn man aus einem beliebigen Puncte D (Fig. 26.) des Perpendikels CI nach gleichen Entfernungen von C die geraden Linien DE, DF zieht, so sind sie gleich, und machen mit AB gleiche Winkel, zwey spitzige auf der Seite des Perpendikels, und zwey stumpfe auf der andern Seite, das ist, wenn $CE = CF$, so ist I. $DE = DF$; II. $r = x$ spitzig; III. $o = y$ und stumpf. Denn da $CD = CD$; $CE = CE$ (per hyp.) und $C = 90°$, so ist $\triangle DEC = \triangle DFC$ (§. 24.) mithin (§. 22. Zus.) $DE = DF$; $r = x$; und weil die Dreyecke rechtwinklicht sind, so sind diese beyden Winkel spitzig. Ferner ist $r + o = 2R = x + y$ (§. 11. II. Zus.)

$$r = x$$

mithin $o = y$, aber beyde stumpf (§. 12. II. Zus.)

IV. Zusatz: Wenn DG von C weiter absteht, als DE, so ist $DG > DE$, hingegen $m < r$;

Denn

Denn da o ſtumpf iſt (II. Zuſ.), ſo iſt DG > DE. (§. 34. III. Zuſ.)

Ferner r > m (§. 32. I. Zuſ.).

V. Zuſatz: Liegt DH näher dem Perpendikel DC als DE, ſo iſt DH < DE, hingegen s > r.

Denn s iſt ſpitzig (§. 32. III. Zuſ.) mithin n ſtumpf (§. 12. II. Zuſ.), alſo DE > DH (§. 34. III. Zuſ.) Ferner s > r (§. 32. I. Zuſ.).

VI. Zuſatz: Wenn in einem Dreyecke zwey Seiten nebſt dem Winkel, welcher der kleinern entgegenſteht, gegeben ſind, ſo giebt es unter dieſen Beſtimmungen zwey verſchiedene Dreyecke, wovon eines ſpitz- das andere ſtumpfwinklicht iſt.

Denn wenn DG, DE, und m gegeben ſind, ſo enthält ſowohl das ſtumpfwinklichte Dreyeck DEG, als das ſpitzwinklichte Dreyeck DFG dieſe Beſtimmungen, weil DF = DE iſt (III. Zuſ.).

VII. Zuſatz Wenn in einem Dreyecke zwey Seiten nebſt dem Winkel, welcher der gröſsern Seite entgegenſteht, gegeben ſind, ſo iſt das Dreyeck vollkommen beſtimmet.

Denn wenn DG, DE und o gegeben ſind, ſo iſt unter dieſen Beſtimmungen nur das einzige ſtumpfwinklichte Dreyeck DEG möglich; denn nimmt man DE als Grundlinie, ſo muſs die Spitze in G fallen; denn jede andere Linie, die näher läge, würde kleiner und jede, die weiter entfernt wäre, würde gröſser als die gegebene DG ſeyn. (IV. u. V. Zuſ.)

Eben

Eben so ist aus DG, DF, und x nur das spitzwinklichte Dreyeck DFG möglich.

VIII. Zusatz: Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten, nebst jenem Winkel, welcher der größern entgegensteht, gleich sind, so sind sie congruent.

IX. Zusatz: Zwey rechtwinklichte Dreyecke sind congruent, wenn sie einen Katheten und die Hypothenuse gleich haben.

§. 39.

Lehrsatz:

Wenn im gleichschenklichten Dreyecke eine von der Spitze gezogene gerade Linie die Grundlinie halbiret, so theilet sie auch den Winkel an der Spitze in 2 gleiche Theile, und steht auf der Grundlinie senkrecht; das ist, wenn (Fig. 27.) AC = BC; AD = BD; so ist o = r; und m = n = 90°.

Beweis:

Da AC = BC; AD = BD (per hyp.), CD = CD; so ist △ ACD ≅ △ BCD (§. 28.), und o = r; m = n (§. 22. Zus.) und (§. 11. c.) CD steht senkrecht auf AB.

I. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreyecke, wenn eine gerade Linie CD den Winkel an der Spitze halbiret, so halbiret sie auch die Grundlinie, und steht auf ihr senkrecht; das ist, wenn AC = BC; o = r; so ist AD = BD; m = n.

Im

Denn da AC = BC; o = r (par hyp.), CD = CD; so ist △ ACD ≅ △ BCD (§. 24.), folglich AD = BD, m = n (. 22. Zuſ.)

II. Zuſatz: Im gleichſchenklichten Dreyecke theilet ein von der Spitze auf die Grundlinie gezogener Perpendikel den Winkel an der Spitze, und die Grundlinie in zwey gleiche Theile; das iſt, wenn AC = BC; m = n, ſo iſt o = r; AD = BD.

Denn ſonſt könnte man durch eine andere Linie von der Spitze die Grundlinie halbiren, und dieſe halbirte den Winkel an der Spitze, und ſtünde auf der Grundlinie ſenkrecht (Lehrſatz), mithin gäbe es von C zwey verſchiedene Perpendikel auf die Grundlinie gegen (§. 38. I. Zuſ.).

II. Abſchnitt.

Von Parallellinien.

§. 40.

Erklärungen.

a. Zwey Linien AB, CD (Fig. 28.) in einer Ebene, die, wie immer verlängert, nicht zuſammenſtoſſen, oder einander durchſchneiden, heißen **Parallellinien.**

b. Um die parallele Lage zweyer Linien auszudrücken, ſetzet man zwiſchen ſie das Zeichen (∥), ſo z. B. AB ∥ CD zeiget an, daß AB mit CD parallel ſey.

§. 41.

§. 41.

Erklärungen.

Wenn zwey gerade Linien AB, CD in einer Ebene von einer dritten geraden Linie EF durchschnitten werden, so heißen

a. n, y oder x, m die beyden inneren Winkel,

b. o der äußere, und y sein innerer entgegengesetzter;

c. x, y, und eben so n, m die Wechselwinkel.

§. 42.

Lehrsatz.

Wenn zwey Linien AB, CD in einer Ebene von einer dritten EF so durchschnitten werden, daß entweder

I die Summe der beyden innern Winkel $n + y = 180°$ oder

II der äußere Winkel o seinem innern entgegengesetzten y gleich ist, oder

III die Wechselwinkel x, y gleich sind, so sind die Linien AB und CD parallel.

Beweis von I. Daß ist, wenn $n + y = 180° = 2R$, so ist AB ∦ CD.

Wenn $n + y = 2R$, so können die Linien AB, CD in keinen Punct zusammen stoßen, folglich sind sie parallel (§. 40.). Denn würden AB, CD auf der Seite der Puncte B, D zusammen stoßen, so entstünde ein Dreyeck, in welchem zwey Winkel $n + y =$

2R

$2R = 180°$ wären, gegen (§. 32. II. Zuſ.). Träfen hingegen AB, CD auf der andern Seite, wo A, C liegen, zuſammen, ſo entſtünde ebenfalls ein Dreyeck, in welchem $x + m = 2R = 180°$.

Denn da $x + n = 180° = 2R$
$m + y = 180° = 2R$ (§. 11. II. Zuſ. u. §. 14. II. Zuſ.)

mithin $x + n + m + y = 180° + 180° = 4R$

Nun iſt $n + y = 180° = 2R$ (per hyp.)

folglich $x + m = 180° = 2R$;

+B, und CD können alſo auch auf dieſer Seite nicht zuſammentreffen, und ſind daher parallel.

Beweis von II. Wenn $o = y$, ſo iſt AB ∦ CD.

Denn $o + n = 2R$ (§. 11. II. Zuſ.)
$= + n \; o = y$ (per hyp.)

mithin $n + y = 2R$, folglich AB ∦ CD Nr. I.

Beweis von III. Wenn $x = y$, ſo iſt AB ∦ CD.

Denn $x + n = 2R$
iſt nun $x = y$

ſo iſt $n + y = 2R$, mithin wieder AB ∦ CD Nr. I.

§. 43.

Aufgabe.

Durch einen beliebigen G. in einer Ebene mit CD eine Parallele zu ziehen.

Auflösung:

1. Man nehme in CD einen beliebigen Punct H, und ziehe zwischen G, H die unbestimmte gerade Linie EF.

2. Verzeichne durch G auf EF einen Winkel x = y, oder o = y (§. 29.) in beyden Fällen wird der andere Schenkel, das ist, AG, oder BG zu CD parallel seyn. (§. 42. II. u. III.).

§. 44.

Lehrsatz:

Wenn zwey gerade Linien CD, LP (Fig. 29.) in einer Ebene von einer dritten GH so durchschnitten werden, daß die Summe der beyden innern Winkeln PGH + GHD < 2 R., oder kleiner als 180° sind, so stossen sie auf der Seite von B, D zusammen.

Beweis:

1. Man verzeichne den Winkel AGH = GHD, (§. 29.) und ziehe AB, so ist AB ∦ CD (§. 43.)

2. Ferner AGH + BGH = 2 R, mithin BGH + GHD = 2 R., folglich

3. BGH + GHD > PGH + GHD (per hyp.), und BGH > PGH; mithin

4. liegt GP zwischen BG und GH.

5. Nun rücke man AB gegen CD, bis G auf H, also AB auf CD zu liegen kömt, so fällt GP ganz unter CD;

CD, mithin muß schon eher der Punct P die Linie CD durchschnitten haben.

6. Man setze, dieser Durchschnitt habe Statt, wenn G in g liegt.

7. Rückt man nun G an seine erste Lage näher, so fällt zwar der Durchschnitt von p immer weiter gegen K; aber es läßt sich für keine Lage von G ein letzter angeben, folglich

8. durchschneidet auch LP in der ersten Lage, verlängert die Linie CD auf der nemlichen Seite.

§. 45.

Lehrsatz.

Wenn zwey Parallellinien AB, CD (Fig. 28.) von einer geraden Linie EF durchschnitten werden, so ist

I. die Summe der beyden innern $n + y = 2R = 180°$.

II. der äußere Winkel o ist seinem innern entgegengesetzten y, und

III. die Wechselwinkel x, y sind gleich.

Beweis von I. Wenn AB $\nparallel$ CD, so ist $n + y = 2R$. Denn wäre $n + y < 2R$, so würden sich AB und CD auf dieser Seite durchschneiden (§. 44.).

Wäre hingegen $n + y > 2R$, so müßten die Linien aus dem nemlichen Grunde auf der andern Seite zusammen stoßen;

Denn

Denn $x + n = 2R$
$m + y = 2R$ } (§. 11. II. Zuſ.)

mithin $x + m + n + y = 4R$

wäre daher $n + v > 2R$, ſo müßte auch

$x + m < 2R$ ſeyn,

mithin würden wieder die Linien auf dieſer Seite zuſammen ſtoſſen, folglich nicht parallel ſeyn, gegen die Annahme.

Beweis von II.; wenn $AB \nparallel CD$, ſo iſt $o = y$.

Denn $o + n = 2R$ (§. 11. II. Zuſ.)

ferner $n + y = 2R$ Nr. I.

mithin $o + n = n + y$, folglich $o = y$.

Beweis von III. Wenn $AB \nparallel CD$, ſo iſt $x = y$.

Denn aus I iſt $n + y = 2R$

ferner $x + n = 2R$

mithin $n + y = x + n$, und $x = y$.

I. Zuſatz: Durch einen Punct G (Fig. 29.) giebt es mit CD in einer Ebene nur eine Parallele AB.

Denn man ziehe GH, ſo macht jede andere Linie LP mit GH einen kleinern oder gröſsern Winkel PGH, als BGH, mithin iſt allemal PGH + GHD kleiner oder gröſser als 2R; folglich die Linien nicht parallel.

II. Zuſatz: Wenn eine Linie LP, die eine Parallele AB in G durchſchneidet, ſo ſchneidet ſie verlängert auch die andere CD. Denn ſonſt wäre $LP \nparallel CD$,

und

und es gäbe durch C zwey verſchiedene Parallelen AB, und LP gegen den I. Zuſ.

III. Zuſatz: Wenn zwey Linien AB, CD mit einer dritten IK in der nemlichen Ebene parallel ſind, ſo ſind ſie auch unter ſich parallel, das iſt (Fig. 30.)
Wenn AB ∦ IK; CD ∦ IK; ſo iſt AB ∦ CD.
Denn man durchſchneide mit der geraden Linie EF, die Linie AB, ſo ſchneidet ſie auch IK, und folglich auch CD. (II. Zuſ.)
Nun iſt $o = r$
$r = y$ (per hyp. und Lehrſ.)
mithin $o = y$, alſo AB ∦ CD (§. 42. II.).

IV. Zuſatz: Parallelen zwiſchen Parallelen ſind gleich lang, das iſt (Fig. 31.)
wenn AB ∦ CD, und AC ∦ BD,
ſo iſt auch AB = CD; AC = BD
Denn man ziehe die Diagonal AD; ſo iſt
$x = y$; $m = n$ (Lehrſ. Nr. III.), AD = AD.
Folglich △ ACD ≅ △ ABD (§. 26.) und
AB = CD, AC = BD (§. 22. Zuſ.).

V. Zuſatz: Zwiſchen zwey Parallelen ſind alle Perpenkel gleich, das iſt (Fig. 32.)
wenn AB ∦ CD, ſo iſt EF = GH.
Denn $x = R = y$, (per hyp.), mithin
$x + y = 2R$, folglich EF ∦ GH (§. 42. N. I.).
und EF = GH (IV. Zuſ.).

VI. Zuſatz: Wenn die Schenkel eines Winkel c h f (Fig. 30.) inner den Schenkeln des Winkels C H F

in

in einer Ebene liegen, und ihnen parallel sind, so sind die Winkel gleich, das ist, wenn ch ∥ CH, fh ∥ FH, so ist chf = CHF. Denn man ziehe die gerade Linie gH, so ist

$$\left.\begin{array}{l} n = u \\ m = s \end{array}\right\}$$ (Lehrs. Nr. II.), mithin

$n + m = u + s$, das ist $chf = CHF$.

§. 46.

Lehrsatz:

Wenn man auf den Schenkeln AB, DB eines hohlen Winkels B (Fig. 33—35.) die Perpendikel EF, GH errichtet, so stossen sie in einem Puncte C zusammen.

Beweis:

1. Wenn B = R (Fig. 33.), so ist GH ∥ BD (§ 42. I.), und EF schneidet also GH (§. 45. II Zus.).

2. Ist B gröſser, als ein rechter Winkel, also stumpf (Fig. 34.), so ist $x + m > 2R$, mithin $n + y < 2R$, also stossen AB, FE verlängert in I zusammen (§. 44.), ferner ist

3. I spitzig (§. 32. III. Zus.), also $G + I < 2R$, folglich stossen CH und IF, das ist, die Perpendikel GH, EF im Puncte C zusammen.

4. Wenn endlich B spitzig ist (Fig. 35.), also $B + E < 2R$, so stossen BA, EF in I zusammen (§. 44.).

5. I ist wieder spitzig (§. 32. III. Zus.), also $I + G < 2R$, folglich

6. stossen IE, GH, oder die Perpendikel EF, GH in einem Puncte zusammen.

§. 47.

Lehrsatz:

Die drey Winkel eines Dreyeckes halten zusammen zwey rechte oder 180°, das ist (Fig. 36.)

$$A + B + C = 2R = 180°.$$

Beweis:

1. Man ziehe zu einer Seite AB durch die entgegenstehende Ecke C die Parallele DE, so ist

2. $o = o$
   $x = y$
   $m = n$ } (§. 45. Nr. III.)

mithin $o + x + m = o + y + n$,
ferner $x + o + m = 2R$ (§. 11. III. Zus.),
Also $o + y + n$, das ist $C + A + B = 2R$.

I. Zusatz: Wenn man in einem Dreyecke von 180° die Summe zweyer Winkel abzieht, so bekömmt man den dritten.

II. Zusatz: Wenn in zwey Dreyecken eine Seite, und 2 Winkel, von welchen einer der Seite anliegt, der andere gegenüber steht, gleich sind, so sind die Dreyecke congruent, das ist (Fig. 13.), wenn AB = ab; A = a, C = c, so ist △ ABC ≅ △ abc.

Denn B = 180° — (A + C) I. Zus.
= 180° — (a + c)
= b.

folglich △ ABC ≅ △ abc (§. 26.).

III. Zusatz: Durch eine Seite und zwey Winkel ist ein Dreyeck vollkommen bestimmt; denn ein anderes mit eben diesen Bestimmungen ist solchen congruent (II. Zus. u. §. 26.).

IV. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreyecke ist durch einen Winkel jeder der beyden übrigen gegeben.

V. Zusatz: Im gleichseitigen Dreyecke ist jeder Winkel = 60°.

VI. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreyecke betragen die zwey spitzigen Winkel zusammen 90°, ist also einer davon gegeben, so ist auch der andere gegeben.

VII. Zusatz: Im Dreyecke ist der äußere Winkel den beyden innern zusammengenommen gleich; das ist (Fig. 36.) r = o + y.

Denn n + r = 180° (§. 14. II. Zus.)
n + o + y = 180° (Lehrs.)

also n + r = n + o + y; folglich r = o + y.

VIII. Zusatz: Wenn AC die Grundlinie, also B die Spitze eines gleichschenklichten Dreyeckes, mithin $o = y$ (§. 25. I. Zus.) ist, so ist $r = o + y = 2o = 2y$; das ist, im gleichschenklichten Dreyecke ist der äußere Winkel an der Spitze doppelt so groß, als jeder Winkel an der Grundlinie.

§. 48.

Aufgabe:

Am Ende einer Linie DE (Fig. 37.) einen Perpendikel zu errichten.

Auflösung:

1. Man nehme den beliebigen Punct B in der gegebenen Linie DE, und errichte über DB ein gleichschenklichtes Dreyeck BAD. (§. 23. II. Zus.);
2. Verlängere den Schenkel BA bis C, so daß $BA = AC = AD$ ist;
3. Ziehe die gerade Linie CD, so steht solche auf DE senkrecht.

Beweis:

$o = n$
$r = C$ } (§. 25. I. Zus.)

mithin $o + r = n + C$.

Nun ist $(o + r) + C + n = 2R$ (§. 47.)
mithin auch $(o + r) + (o + r) = 2R$;
das ist: $2(o + r) = 2BDC = 2R$
folglich $BDC = R$, mithin CD lothrecht.

§. 49.

§. 49.

Erklärung:

Ein von der Spitze auf die Grundlinie eines Dreyeckes gezogener Perpendikel, oder die Entfernung der Spitze von der Grundlinie, heißt die Höhe des Dreyeckes.

Zusatz: Wenn zwey oder mehrere Dreyecke, wie (Fig. 26.), alle eine gemeinschaftliche Spitze D haben, und ihre Grundlinien neben einander so liegen, daß sie eine einzige gerade Linie bilden, so haben sie alle die gemeinschaftliche Höhe DC; denn von der Spitze D ist auf eine gerade Linie nur ein Perpendikel möglich. (§. 38. I. Zus.).

III. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vierecken.

§. 50.

Grundsatz:

Jede Diagonal theilet das Viereck in zwey Dreyecke.

Anmerk. Gegenwärtig beschränken sich die Untersuchungen auf Vierecke, und überhaupt auf Figuren mit lauter hohlen Winkeln.

I. Zusatz: Der Kürze wegen bezeichnet man ein Viereck gemeiniglich durch zwey Buchstaben von zwey einander entgegen gesetzten Ecken, z. B. BC (Fig. 31.)

II. Zusatz: Im Vierecke halten alle vier Winkel zusammen 360°; das ist $A+B+C+D=4R=360°$. Denn man ziehe die Diagonal AD, so ist

$$\left.\begin{array}{l} C+x+m=2R \\ B+n+y=2R \end{array}\right\} \text{(§. 47.), mithin}$$

$$C+x+n+B+m+y=4R,$$

das ist $C+A+B+D=4R$.

III. Zusatz: Durch zwey Seiten, und den drey anliegenden Winkeln ist ein Viereck vollkommen bestimmt, das ist (Fig. 38.) durch DA, AB, D, A, B ist das Viereck AC vollkommen bestimmt. Denn durch DA, AB und A ist das △ ABD bestimmt (§. 24. Zus.), mithin auch die Diagonal BD, oder eine Seite vom △BCD; durch D, B ist überdieß die Lage von DC, BC gegen DB, mithin wieder das △ BCD (§. 26. Zus.), folglich das Viereck AC selbst bestimmt.

IV. Zusatz: Durch drey Seiten DA, AB, BC, und den beyden eingeschlossenen Winkeln A, B ist das Viereck AC vollkommen bestimmt. Denn durch DA, AB, A ist das △ DAB (§. 24. Zus.) mithin auch die Diagonal BD, also eine Seite vom △ BCD bestimmt, ferner ist BC, und durch B die Lage von BC gegen BD, also CBD, mithin das △ BCD; folglich das ganze Viereck AC vollkommen bestimmt.

V. Zusatz: Durch alle vier Seiten nebst einem Winkel A ist das Viereck AC vollkommen bestimmt.

Denn

Denn durch AD, AB und A ist das △ DAB, mit auch die Diagonal BD; und aus BD, BC, CD ist das △ BCD (§. 28. Zus.), mithin das Viereck AC selbst bestimmt.

VI. Zusatz: Durch alle Seiten nebst der Diagonal ist das Viereck AC vollkommen bestimmt. Denn in beyden Dreyecken sind durch alle Seiten die Dreyecke selbst, mithin auch das Viereck vollkommen bestimmt.

§. 51.

Erklärungen:

a. Ein Viereck AC (Fig. 39.), in welchem jedes Paar opponirter Seiten parallel sind, nemlich AB ∥ CD, und BC ∥ AD, heißt ein **Parallelogramm**;

b. in welchem nur ein Paar opponirter Seiten, nemlich (Fig. 40.) AB ∥ CD, nicht aber das andere Paar BC, AD parallel sind, heißt ein **Trapez**,

c. in welchem endlich keine Seite parallel ist, wie (Fig. 38.) heißt ein **Trapezoid**,

d. Der Perpendikel zwischen den parallelen Seiten eines Parallelogrammes oder Trapezes heißt dessen **Höhe**.

I. Zusatz: Im Parallelogramme halten zwey Winkel, die an einer Seite anliegen, zusammen 180°, das ist (Fig. 39.) A + B = A + D = 180° (§. 45. Nr. I.)

II. Zusatz: Im Parallelogramme sind die opponirten Winkel gleich, das ist $B = D$.

Denn $A + B = A + D = 180°$ (I. Zus.) folglich $B = D$.

III. Zusatz: Wenn im Parallelogramme ein Winkel ein rechter ist, so sind die übrigen drey auch rechte Winkel, das ist (Fig. 42.), wenn $A = R = 90°$, so ist auch $B = C = D = R = 90°$.

Denn $A + B = A + D = 2$ R. I. Zus.

Wenn nun $A = R$; so ist $B = D = 90° = R$;

ferner $A = C$ (II. Zus.) $= R$.

IV. Zusatz: Im Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten gleich (§. 45. IV. Zus.).

V. Zusatz: Die Diagonal AD (Fig. 31.) theilet das Parallelogram in zwey congruente Dreyecke.

Denn $AB = CD$
$AC = BD$ } IV. Zus.
$AD = AD$

mithin $\triangle ACD \cong \triangle ABD$ (§. 28.).

VI. Zusatz: Wenn in einem Viereck die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so sind sie auch parallel, und das Viereck ist ein Parallelogramm; das ist

wenn $AB = CD$, und $AC = BD$,
so ist $AB \parallel CD$, und $AC \parallel BC$.

Denn man ziehe AD, so ist $\triangle ACD \cong \triangle ABD$ (§. 28.), mithin (§. 22. Zus.)

$$\left.\begin{array}{l} x = y, \text{ also } AC \parallel BD \\ m = n, \ldots\ldots CD \parallel AB \end{array}\right\} (\S.\ 42.\ III.)$$

Und das Viereck ein Parallelogramm (Erkl. a.).

VII. Zusatz: Wenn in einem Vierecke zwey opponirte Seiten AB, CD gleich und parallel sind, so sind auch die anderen zwey entgegenstehenden Seiten AC, BD gleich und parallel, mithin das Viereck ein Parallelogramm; das ist, wenn $AB \overline{\parallel} CD$, so ist $AC \overline{\parallel} BD$.

Denn da $CD \parallel AB$,
so ist $m = n$ (§. 45. Nro. III.)
ferner $CD = AB$
$AD = AD$

folgl. $\triangle ACD \overline{\cong} \triangle ABD$; mithin (§. 22. Zus.) $AC = BD$, und $x = y$, folglich auch $AC \parallel BD$ (§. 42. N. III.)
Wenn man daher die Endspuncte zweyer gleichlanger Parallelen durch gerade Linien verbindet, so erhält man ein Parallelogramm.

VIII. Im Trapez ist eine von den Parallelen kleiner, als die andere. Denn wären sie gleich lang, so wäre die Figur ein Parallelogramm (VII. Zus.).

IX. Zusatz: Im Trapez sind die beyden Winkel, die an der größern Parallele anliegen, zusammen kleiner, als zwey rechte, und die an der kleinern Parallele anliegen, größer, als zwey rechte Winkel, das ist (Fig. 44.) $A + B < 2R$; $C + D > 2R$. Denn man verlängere die kleinere Parallele CD bis F, so

daß

daß CF = AB, mithin AF ein Parallelogramm wird (VII. Zuſ.), ſo iſt

$A + ABF = 2R$ (I. Zuſ.)

$A + ABD < A + ABF$, mithin

$A + ABD < 2R$; folglich $C + D > 2R$ (§. 50. II. Zuſ.).

X. Zuſatz: Wenn man im Trapeze die Seiten AC, BD gegen die kleinere Parallele CD verlängert, ſo ſtoſſen ſie auf dieſer Seite in E zuſammen. Denn da $A + B < 2R$ (IX. Zuſ.), ſo ſtoſſen AC und BD verlängert auf dieſer Seite zuſammen (§. 44.).

§. 52.

Aufgabe:

Aus zwey Seiten AB, AD nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel ein Parallelogramm zu verzeichnen. (Fig. 39.)

Auflöſung:

1. Man verzeichne an die gegebene Seite AB den Winkel A (§. 29.), und trage
2. auf dem andern Schenkel die zweyte Seite AD auf.
3. Aus B beſchreibe man mit AD, und aus D mit AB Kreisbögen;
4. Nach dem Durchſchnittspuncte C ziehe man die geraden Linien BC, CD, ſo iſt
5. das Viereck AC das verlangte Parallelogramm.

Beweis:

Denn da zwey Seiten gegeben sind, so sind dadurch auch die übrigen zwey gegeben (§. 51. IV. Zus.), mithin das Viereck bestimmt (§. 30. V. Zus.).

Ferner da CD = AB, BC = AD Nr. 3, so ist das verzeichnete Viereck ein Parallelogramm (§. 51. VI. Zus.).

§. 53.

Erklärungen:

a. Ein Parallelogramm, in welchem der Winkel A (Fig. 41.) ein rechter, und die beyden einschließenden Seiten AB, AD gleich sind, heißt ein **Quadrat**, und

b. wenn (Fig. 42.) die einschließenden Seiten ungleich sind, ein **Rechteck**.

c. Wenn hingegen der Winkel A schief (Fig. 39.), und die einschließenden Seiten gleich sind, so heißt das Parallelogramm ein **Rhombus** oder **Raute**.

d. Wenn endlich der Winkel A schief, und die einschließenden Seiten AB, AD (Fig. 43.) ungleich sind, so heißt so ein Parallelogramm ein **Rhomboid**.

I. Zusatz: Im Rechtecke und dem Quadrate sind alle Winkel rechte Winkel (§. 51. III. Zus.).

II. Zusatz: Im Quadrate sind alle Winkel, und alle Seiten gleich, folglich ist das Quadrat ein reguläres Viereck (§. 16.).

III.

III. Zusatz: Das Quadrat ist durch eine, das Rechteck durch zwey Seiten, der Rhombus durch einen Winkel und eine Seite, die Rhomboid durch zwey Seiten nebst einem Winkel vollkommen bestimmt.

§. 54.

Lehrsatz:

Wenn von zwey Quadraten AC, ac (Fig. 41.) die Seite AB vom erstern grösser, als eine Seite ab des andern Quadrates ist, so ist auch das erstere Quadrat grösser als das andere; das ist

wenn $AB > ab$; so ist $AB^q > ab^q$.

Beweis:

1. Man lege a auf A, ab längst AB, so fällt ad auf AD, wenn man die Quadrate nicht neben, sondern aufeinander leget (§. 10. II. Zus.).

2. Da nun $ab < AB$; und eben so $ad < AD$ ist, so ab^q nur ein Theil von AB^q, folglich kleiner (§. 19. Nr. 3. Arithm.).

I. Zusatz: Gleiche Quadrate haben gleiche Seiten, das ist, wenn $MO^q = AB^q$, so ist auch $MO = AB$.

Denn wäre $MO > AB$, so müßte auch $MO^q > AB^q$, und wäre $MO < AB$, so müßte ebenfalls nach dem Lehrsatze $MO^q < AB^q$ seyn, beydes gegen die Voraussetzung.

II. Zusatz: Das größere Quadrat hat die größere Seite, das ist, wenn $MO^q > AB^q$, so ist auch $MO > AB$.

Denn wäre $MO = AB$, so müßte auch (§. 53. III Zus.) $MO^q = AB^q$ seyn; wäre hingegen $MO < AB$, so würde nach dem Lehrsatze auch $MO^q < AB^q$ seyn, mithin beydes gegen die Voraussetzung.

IV. Abschnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien in Vielecken.

§. 55.

Erklärungen:

a. Vielecke (§. 16.) heißen Fünfecke, Sechsecke u. s. f., wenn sie 5, 6 u. s. f. Seiten haben.

b. Der Winkel, den zwey Seiten in einem regulären Vielecke einschließen, heißt der Vielecks- oder Polygonswinkel.

c. Vielecke von gleichviel Seiten oder Ecken heißen gleichnamige Vielecke.

I. Zusatz: In einem Vielecke von n Seiten kann man aus einer Ecke $n - 3$ Diagonalen ziehen; denn offenbar kann man vom Punkte A (Fig. 45.) an alle Ecke, mithin im Siebenecke 6 gerade Linien, nemlich AB, AC, AD, AE, AF, AG ziehen; nun sind alle, die erste und

letzte

letzte ausgenommen, Diagonalen, mithin im Sechsecke $4 = 7 - 3$ Diagonalen. Und überhaupt bey n Seiten, lassen sich $n-1$ Linien aus einem Ecke zu den übrigen ziehen, und da alle, außer der ersten und letzten, Diagonalen sind, so giebt es $n-3$ Diagonalen.

II. Zusatz: Das Vieleck von n Seiten läßt sich durch die Diagonalen aus einer Ecke in $n-2$ Dreyecke theilen. Denn das erste Paar Seiten AB, BC geben mit der ersten Diagonal ein Dreyeck, jede folgende Seite giebt mit zwey Diagonalen wieder ein Dreyeck, nur beym letzten Dreyecke werden wieder zwey Seiten erfodert, mithin giebt es $n-2$ Dreyecke in einem Vielecke.

Anmerk. In beyden Zusätzen ist angenommen, daß alle Winkel hohl sind.

§. 56.

Lehrsatz:

Im Vielecke von n Seiten ist die Summe aller Winkel $= (n-2)\ 180° = n\ 180° - 360°$.

I. Beweis:

Man ziehe aus einem Puncte A alle mögliche Diagonalen, so erhält man $n-2$ Dreyecke (§. 55. II. Zus.); nun halten alle 3 Winkel eines Dreyeckes 180° (§. 47.), mithin alle Winkel von $(n-2)$ Dreyecken, oder alle Winkel des Vieleckes $(n-2)$ 180°.

II.

II. Beweis:

Man ziehe (Fig. 46.) aus einem beliebigen Puncte F im Vielecke an alle Ecke gerade Linien, so bekömt man so viele Dreyecke, als die Figur Seiten hat, mithin n Dreyecke.

Nun halten die Winkel von n Dreyecken zusammen n. 180° (§. 47.).

Alle Winkel um F, welche abgezogen werden müssen, weil sie nicht zum Vielecke gehören, halten zusammen 360° (§. 14. III. Zus.)

Mithin alle Winkel des Vieleckes $n.180° - 360° = (n-2)\,180°$.

I. Zusatz: In regulären Vielecken von n Seiten hält der Polygonswinkel $180° - \frac{360°}{n}$; denn alle Winkel halten zusammen $n.180° - \frac{360°}{n}$, mithin einer davon, da sie alle gleich sind, $180° - \frac{360}{n}$.

II. Zusatz: Im regulären Fünfecke ist der Polygonswinkel 108°; im regulären Sechsecke 120°.

§. 57.

Lehrsatz:

Ein Vieleck ist vollkommen bestimmt (Fig. 45.), wenn entweder

I. außer zwey Seiten FG, GA nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel G; oder

II. außer einer Seite GA nebſt den beyden anliegenden Winkeln G, A; oder

III. außer drey auf einander folgenden Winkeln F, G, A alle übrigen Seiten und Winkel gegeben ſind; oder

IV. wennn alle Seiten und Diagonalen gegeben ſind.

Beweis von I.

Durch die gegebenen Stücke iſt die Lage und Größe aller Seiten von A bis F beſtimmt, die beyden Linien AG, FG, derer Lage durch A und F gegeben iſt; können ſich aber nur in einem Puncte G durchſchneiden (§. 6. III. Zuſ.), mithin iſt auch die Größe dieſer Seite, und der Winkel G, folglich das Vieleck vollkommen beſtimmt.

Beweis von II.

Durch die gegebenen Seiten und Winkel iſt das Vieleck von A bis G beſtimmt, alſo auch die Seite AG (§. 6. II. Zuſ.) nebſt den Winkeln A, G, mithin das Vieleck ſelbſt beſtimmt.

Beweis von III.

Aus den gegebenen Seiten und Winkeln iſt das Vieleck A bis F, mithin auch die Diagonal AF vollkommen beſtimmt; aus AF aber nebſt den beyden Seiten FG, GA iſt der Triangel AGF (§. 28. I. Zuſ.), mithin aus den gegebenen Stücken das Vieleck ſelbſt vollkommen beſtimmt.

Be-

Beweis von IV.

Durch alle Seiten und Diagonalen ſind alle Triangel, mithin das Vieleck ſelbſt vollkommen beſtimmt.

V. Abſchnitt.

Von der Lage und Größe gerader Linien im Kreiſe.

I.

Von der Lage der Radien, und dem Maaße der Winkel.

§. 58.

Lehrſatz:

Kreiſe von gleichen Halbmeſſern AC, ac (Fig. 47.) congruiren.

Beweis:

Man lege den Mittelpunct c des einen Kreiſes auf den Mittelpunct C des andern Kreiſes, ſo muß jeder Punct a der Peripherie vom erſten Kreiſe, auf einen Punct A von der Peripherie des letzten Kreiſes fallen; denn läge a innerhalb dem Kreiſe zwiſchen A und C, ſo müßte $ac < AC$ ſeyn; läge hingegen a außerhalb der Peripherie des Kreiſes um C, ſo müßte $ac > AC$ ſeyn, beydes gegen die Vorausſetzung.

I. Zuſatz: Ein größerer Halbmeſſer giebt einen größern Kreis, das iſt, wenn AC (Fig. 49.) $>$ ac (Fig. 47.), ſo erſterer Kreis größer als letzterer.

Man

Man lege wieder die Kreise so aufeinander, daß c auf C fällt, so werden auch alle Puncte a, b der Peripherie des zum Halbmesser ac gehörigen Kreises näher am Mittelpuncte C, als jeder Punct A oder B u. s. f. des Kreises vom Halbmesser AC, mithin die ganze Peripherie des erstern innerhalb der Peripherie des letztern Kreises liegen, mithin der Kreis mit dem Halbmesser AC größer, als jener vom Halbmesser ac seyn.

II. Zusatz: Gleiche Kreise haben gleiche Radien; denn wären letztere ungleich, so müßten es auch erstere seyn (I. Zus.)

III. Zusatz: Ein größerer Kreis hat einen größern Halbmesser; denn wären die Halbmesser gleich, so würden auch die Kreise gleich seyn, und wäre der Halbmesser des größern Kreises kleiner, so müßte der größere Kreis zugleich der kleinere seyn.

§. 59.

Lehrsatz:

Eine gerade Linie MN (Fig. 48.) kann die Kreislinie nur in zwey Puncten G, H durchschneiden.

Beweis:

1. Gäbe es einen dritten Durchschnittspunct, so müßte solcher entweder zwischen G, H wie I, oder außer denselben wie F liegen; man ziehe nun

2. die geraden Linien EI, EF, und die Halbmesser EG, EH, so ist

3.

3. EIH > EGI (§. 32. I. Zuſ.), ferner EGI = EHI (§. 25. I. Zuſ.), alſo EIH > EHI, und EH > EI (§. 34. I. Zuſ.), folglich liegt

4. Jeder Punct I zwiſchen G und H innerhalb dem Kreiſe, und kann alſo kein Durchſchnittspunct ſeyn.

5. Ferner, weil EHG = EGH ſpitzig iſt (§. 32. III. Zuſ.) ſo iſt EHF ſtumpf (§. 12. II. Zuſ.), alſo EF > EH (§. 34. III. Zuſ.); folglich liegt jeder Punct F auſſerhalb dem Kreiſe, und kann alſo wieder kein Durchſchnittspunct ſeyn.

§. 60.

Lehrſatz:

Wenn man durch eine gerade Linie CD vom Mittelpuncte des Kreiſes (Fig. 49.) die Sehne AB halbiret, ſo ſteht dieſe Linie auf der Sehne lothrecht.

Beweis:

Man ziehe die Halbmeſſer AC, BC, ſo iſt △ ACB ein gleichſchenklichtes Dreyeck, deſſen Spitze der Mittelpunct C iſt, folglich ſteht CD auf der Sehne AB als Grundlinie ſenkrecht. (§. 39.)

I. Zuſatz: Ein Perpendikel CD aus des Kreiſes Mittelpunct auf die Sehne AB theilet ſie in gleiche Theile (§. 39. II. Zuſ.).

II. Zuſatz: Wenn man durch einen Perpendikel CD die Sehne AB halbiret, ſo geht er durch den Mittelpunct des Kreiſes; denn im Gegentheile könnte

man vom Mittelpuncte ein Loth auf die Sehne fällen, dieſes theilte die Sehne in 2 gleiche Theile (I. Zuſ.) und wäre alſo ebenfalls ein Perpendikel auf AB durch D gegen (§. 37. Zuſ.).

§. 61.

Aufgabe:

Zu einem gegebenen Kreiſe (Fig. 50.) den Mittelpunct ſuchen.

Auflöſung:

1. Man nehme in der Peripherie drey beliebige Puncte A, B, D, und ziehe die Sehnen AB, BD;
2. errichte durch die Mitte G, E dieſer Sehnen die Perpendikel GH, EF, ſo iſt
3. der Durchſchnittspunct C, der geſuchte Mittelpunct des gegebenen Kreiſes.

Beweis:

Der Mittelpunct liegt in beyden Perpendikeln (§. 60. II. Zuſ.), und weil ſie nur den Punct C gemein haben (§. 6. III. Zuſ.), ſo iſt ſolcher der Mittelpunct.

§. 62.

Aufgabe:

Einen Kreis zu verzeichnen, deſſen Peripherie durch drey gegebene Puncte A, B, D geht, die nicht in einer einzigen geraden Linie liegen.

Auflösung:

1. Man verbinde die gegebenen Puncte durch zwey gerade Linien AB, BD,
2. theile solche durch Perpendikel in gleiche Theile, so werden sich
3. diese Perpendikel zwischen den Schenkeln des Winkels ABD in einem Puncte C durchschneiden (§. 46.);
4. Nun ziehe man aus C mit dem Halbmesser CA eine Kreislinie, so geht sie auch durch B und D.

Beweis:

Man ziehe die geraden Linien CA, CB, CD, so ist

$AG = BG$ ferner $BE = DE$
$G = G = 90°$ $E = E = 90°$ } Nr. 2.
$CG = CG$ $CE = CE$; mithin

$\triangle ACG \cong \triangle BCG$; $\triangle BCE \cong \triangle DCE$ (§. 24.), also
$AC = BC$; $BC = CD$; folglich
$AC = BC = CD$, mithin geht die Kreislinie aus C mit dem Halbmesser AC auch durch B und D.

I. Zusatz: Durch drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist eine Kreislinie, mithin der Kreis selbst vollkommen bestimmt; denn durch diese 3 Puncte ist der Radius (Aufg.), mithin auch der Kreis selbst vollkommen bestimmt (§. 58.).

II. Zusatz: Zwey Kreislinien können einander nur in zwey Puncten durchschneiden; denn hätten sie noch einen dritten Punct gemein, so wären solche nicht zwey verschiedene, sondern nur eine Kreislinie (I. Zus.).

§. 63.

Erklärungen:

a. Ein Winkel ACB (Fig. 47.) oder FCG, der den Mittelpunct C des Kreises zum Scheitel, und die Radien zu Schenkeln hat, oder ein Winkel zweyer Radien am Mittelpuncte, heißt ein **Centriwinkel**;

b. Der zwischen den Radien und dem Bogen ADB enthaltene Theil der Kreisebene, ein **Ausschnitt** (sector), und

c. der zwischen der Sehne AB, und dem Bogen eingeschlossene Theil, ein **Abschnitt** (segmentum.).

§. 64.

Lehrsatz:

In zwey Kreisen von gleichen Halbmessern gehören zu gleichen Centriwinkeln gleiche Sehnen, Bögen, Aus- und Abschnitte; das ist, wenn ACB = acb,
so ist AB = ab; arc. ADB = arc. adb,
Sector ACB = Sect. acb; Segm. ADB = Segm. adb.

Beweis:

1. Weil △ ACB ≅ △ acb, (§. 24.), so ist
ab = AB.

2. Man lege c auf C, ca längst CA, so fällt cb längst CB, und a auf A, b auf B, ferner jeder Punct d auf einem Punct D des Bogens ADB, folglich decken sich auch die Bögen, Ausschnitte und Abschnitte, und sind daher congruent.

I. Zusatz: In einem Kreise gehören zu gleichen Centriwinkeln ACB, FCG gleiche Sehnen, Bögen, Ausschnitte und Abschnitte. Denn wenn ac = AC, und acb = ACB = FCG ist, so ist AB = ab = FG; eben so arc. ADB = arc. adb = arc. FEG u. s. f. (Lehrs.)

II. Zusatz: In einem Kreise, oder in verschiedenen Kreisen von gleichen Halbmessern gehören zu gleichen Sehnen gleiche Centriwinkel, gleiche Ausschnitte, und gleiche Abschnitte; denn wenn AB = FG = ab; so ist △ ACB ≅ △ FCG ≅ △ acb; mithin ACB = FCG = acb, aus welchen vermög dem Lehrs. und I. Zus. das übrige folgt.

III. Zusatz: Eine gerade Linie CE (Fig. 49.), welche den Centriwinkel halbiret, halbirt auch die Sehne, den Bogen, den Ausschnitt und Abschnitt; daß AD = BD folgt unmittelbar aus (§. 39. I. Zus.), und weil ACE = BCE ist, so liegt das übrige im I. Zus.

§. 65.

Lehrsatz:

Im Kreise giebt der vielfache Centriwinkel den vielfachen Bogen, das ist (Fig. 51.), wenn zum Centriwinkel ACB der Bogen AB gehört, so gehört zum Centriwinkel mACB der Bogen mAB, wo m jede beliebige ganze Zahl bezeichnen kann.

Beweis:

1. Wenn ACB = BCD, so ist AB = BD (§. 64 I. Zus.), mithin giebt ACD = 2ACB den Bogen AD = 2AB.

2. Ist nun wieder DCE = BCD = ACB, so ist DE = BD = AB und ACE = 3 ACB giebt den Bogen AE = 3 AB.

3. Da man nun diese Schlüsse für jede nächst größere Zahl wiederholen kann, so giebt mACB den Bogen mAB.

I. Zusatz: Im Kreise verhalten sich die Centriwinkel wie ihre Bögen, das ist ACB : ACF = AB : AF (§. 267. Arithm.).

II. Zusatz: Im Kreise gehören zu gleichen Bögen gleiche Centriwinkel, gleiche Sehnen, gleiche Ausschnitte und Abschnitte; denn (Fig. 47.) ACB : FCG = arc. ADB : arc. FEG (I. Zus.); ist nun arc. ADB = arc. FEG, so ist auch ACB = FCG (§. 210. II. Zus. Arithm.), und aus diesen folget alles Uebrige (§. 64. I. Zus.)

§. 66.

Erklärungen:

1. Die Hälfte der Kreislinie heißt ein **Halbkreis**, der vierte Theil ein **Quadrant**, der sechste Theil ein **Sextant**.

b. Der 360ste Theil der Kreislinie heißt ein **Grad**, der 60ste eines Grades eine **Minute**, der 60ste Theil einer Minute eine **Secunde**.

c. Grade, Minuten, Secunden werden wie bey den Winkeln bezeichnet (§. 14. a.)

Anmerkung. In Frankreich wird die Kreislinie in 4 Theile oder Quadranten, ein Quadrant in hundert Grade, ein Grad in hundert Minuten, und eine Minute in 100 Secunden getheilet.

I. Zusatz: Ein Halbkreis hält 180°, ein Quadrant 90°, ein Sextant 60°.

II. Zusatz: Wenn der Centriwinkel ACD (Fig. 52.) ein rechter ist, so ist sein Bogen AD ein Quadrant; denn man verlängere DC bis E, so ist DBAE ein Halbkreis (§. 17. IV. Zus.), da nun ACD = ACE (§. 12. I. Zus.), so ist arc. AD = arc. AE (§. 64. I. Zus.), mithin jeder ein Quadrant.

III. Zusatz: Der Centriwinkel ACB hält so viele Grade, Minuten u. s. f., als sein Bogen AB;

Denn ACD sey ein rechter Winkel, also AD ein Quadrant, so ist

ACB : ACD = AB : AD (§. 65. I. Zus.).

Da nun ACD = 90° (§. 14. I. Zus.) und AD = 90°, mithin die Hinterglieder gleiche Zahlen sind, so müssen auch die Vorderglieder einerley Zahlen haben (§. 210. II. Zus.).

§. 67.

§. 67.

Erklärung:

Einen Winkel messen heißt sein Verhältniß zum rechten Winkel als dessen Maaß bestimmen, das ist, angeben, wie vielmal ein rechter Winkel, oder aliquoter Theil desselben genommen werden muß, um ihn zu erzeugen (§. 197. Arithm.).

I. Zusatz: Einen Winkel messen heißt seine Größe in Graden, Minuten u. s. w. angeben.

II. Zusatz: Der Bogen mißt seinen Centriwinkel; denn er hält mit ihm gleichviele Grade u. s. f. (§. 66. III. Zus.), der Kürze wegen setzt man daher ACB = AB.

§. 68.

Lehrsatz:

In verschiedenen Kreisen (Fig. 52.) haben die Bögen AB, ab gleicher Centriwinkel ACB, acb gleich viel Grade, Minuten u. s. f.

Beweis:

1. Man verzeichne in beyden Kreisen die rechten Winkel ACD, acd; so ist

2. ACB : ACD = AB : AD
   acb : acd = ab : ad

3. Ist also ACB = acb, und überdieß ACD = acd = 90°, so ist

4. AB : AD = ab : ad (§. 197. VI. Zus. Arithm.)

Nun

Nun hält AD sowohl als ad 90°, mithin haben auch die Bögen AB und ab gleich viele Grade (§. 210. III. Zus. Arithm.)

Zusatz. Man kann also den Winkel durch den Bogen eines Kreises mit einem beliebigen Halbmesser messen.

Anmerk. Mündlich wird die Einrichtung eines Transporteurs und dessen Gebrauch gezeiget.

II.

Von der Größe und Lage der Sehnen und Tangenten.

§. 69.

Lehrsatz:

Die Sehne EF (Fig. 52.) des Sextanten EGF ist dem Radius CE gleich.

Beweis:

Wenn der Bogen EGF ein Sextant, also = 60° ist, so ist auch der Centriwinkel ECF = 60° (§. 66. III. Zus.) mithin E + F = 120° (§. 47.) und E = F = 60° (§. 25.); mithin das Dreyeck ECF gleichseitig (§. 27. II. Zus.), folglich EF = EC.

Zusatz. Der Radius läßt sich sechsmal an der Peripherie des Kreises auftragen.

§. 70.

Lehrsatz:

Zwey gleiche Sehnen sind vom Mittelpuncte gleichweit entfernt, und zwey Sehnen in gleichen Entfernungen vom Mittelpuncte sind gleich, das ist (Fig. 47.)

I. Wenn $AB = FG$; so ist $CH = CI$;
II. wenn $CH = CI$; so ist $AB = FG$.

Beweis:

Man ziehe die Radien AC, BC, FC, GC.

I. Wenn $AB = FG$, so ist auch
$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} FG$, das ist
$AH = GI$ (§. 60. I Zus.)
$AC = CG$
$H = I = 90°$

---

also $\triangle ACH \cong \triangle GCI$ (§. 38. IX. Zus.)
und $CH = CI$.

II. $AC = GC$
$CH = CI$ (per hyp.)
$H = I = 90°$

$\triangle ACH \cong \triangle GCI$ (§. 38 IX. Zus.)
mithin $AH = GI$;
Nun ist $AH = \frac{1}{2} AB$
$GI = \frac{1}{2} FG$ } (§. 60. I. Zus.)

Folglich $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} FG$, und $AB = FG$.

Zusatz: Ungleiche Sehnen haben ungleiche Entfernungen vom Mittelpuncte, und bey ungleichen Entfernungen sind die Sehnen ungleich.

§. 71.

Erklärung:

Der Winkel ADB (Fig. 53.) zweyer Sehnen, deſſen Scheitel D in der Peripherie des Kreiſes liegt, heißt ein **Peripheriewinkel**, AB ſein **Bogen**, und der **Centriwinkel** ACB auf den nemlichen Bogen, ſein **Centriwinkel** und umgekehrt.

§. 72.

Lehrſatz:

Der Centriwinkel iſt doppelt ſo groß als ſein Peripheriewinkel. (Fig. 53, 54, 55.)

Beweis:

Es kann der Mittelpunct C des Kreiſes in Rückſicht eines Peripheriewinkels drey verſchiedene Lagen haben

I. er kann in einem Schenkel (Fig. 53.),

II. zwiſchen beyden Schenkeln (Fig. 54.),

III. außer den Schenkeln (Fig. 55.) des Peripheriewinkels liegen.

Im I. Falle iſt offenbahr ACB = 2 ADB (§. 47. VIII. Zuſ.)

Im II. Falle ziehe man den Diameter DE; ſo iſt wieder

$$\left.\begin{array}{l} m = 20 \\ n = 2r \end{array}\right\} \text{(§. 47. VIII. Zuſ.)}$$

$$m + n = 20 + 2r = 2\,(o + r)$$

das iſt ACB = 2 ADB.

Im

Im III. Falle ziehe man ebenfalls den Durchmesser DE, so ist wieder

Im gleichschenklichten Dreyecke ACD der äußere Winkel $m+n=2(o+r)=2o+2r$; eben so im $\triangle$ BCD der äußere Winkel $n=2r$; folglich (§. 30. N. 1. Ar.)

$m=2o$: das ist $ACB=2ADB$.

I. Zusatz: Der Peripheriewinkel hat seinen halben Bogen zum Maaße. (§. 67. II. Zus.)

II. Zusatz: Peripheriewinkel von gleichen Bögen sind gleich.

III. Zusatz: Ein Peripheriewinkel D, oder E (Fig. 56.) im Halbkreise, oder dessen Schenkel auf dem Diameter stehen, ist ein rechter Winkel. Denn $D=E=\frac{1}{2}$ arc. AFB (I. Zus.) $=90°$.

IV. Zusatz: Der Peripheriewinkel D, dessen Bogen ABC (Fig. 57.) größer als ein Halbkreis, ist stumpf, und der Peripheriewinkel B vom kleinern Bogen ADC ist spitzig. Denn $D=\frac{1}{2}$ arc. ABC; wenn also arc. $ABC>180°$, so ist $D>90°$, also stumpf; eben so $B=\frac{1}{2}$ arc. ADC, wenn nun arc. $ADC<180°$, so ist $B<90°$, folglich spitzig.

V. Zusatz: In einem Vierecke, dessen Ecke sich alle an der Peripherie befinden, sind jedes Paar entgegengesetzter Winkel zwey rechten gleich, oder $180°$.

Denn $A=\frac{1}{2}$ arc. DCB,

$C=\frac{1}{2}$ arc. BAD;

also $A+C=\frac{1}{2}$ arc. $DCB+\frac{1}{2}$ arc. BAD,

$=\frac{1}{2}$(arc. DCB + arc. BAD);

$=\frac{1}{2}$ periph. $=180°$.

Eben

Eben ſo $B = \frac{1}{2}$ arc. ADC
$D = \frac{1}{2}$ arc: CBA

$B + D = \frac{1}{2}$ arc. ADC $+ \frac{1}{2}$ arc. CBA
$= \frac{1}{2}$ (arc. ADC $+$ arc. CBA)
$+ \frac{1}{2}$ periph. $= 180°$.

§. 73.

Aufgabe:

Ein Bogen AEB zu halbieren (Fig. 49.).

I. Auflöſung:

Man ziehe die Radien CA, CB, und halbiere den Centriwinkel (§. 30.) durch CE, ſo theilet ſolche auch den Bogen AEB in zwey gleiche Theile (§. 64. III. Zuſ.)

II. Auflöſung:

Man ziehe die Sehne AB, und halbiere ſolche durch die Perpendikularlinie CE (§. 31.); ſo theilet CE den Bogen in zwey gleiche Theile.

Denn EC geht durch den Mittelpunct C (§. 60. II. Zuſ.) halbieret den Centriwinkel (§. 39), mithin auch den Bogen (§. 64. III. Zuſ.)

§. 74.

Erklärungen:

a. Eine gerade Linie DB (Fig. 58.), welche mit der Kreislinie nur einen Punct A gemein hat, ſonſt ganz außer dem Kreiſe liegt, heißt eine **Tangente.**

b.

b. Eine gerade Linie HE, von welcher ein Theil inner und ein Theil außer dem Kreiſe liegt, heißt eine Secans.

§. 75.

Lehrſatz:

Eine gerade Linie BD (Fig. 58.), welche durch den Endpunct A des Radius auf ihm ſenkrecht ſteht, iſt eine Tangens.

Beweis:

Man nehme in der Linie BD den beliebigen Punkt F, und ziehe CF, ſo iſt $CF > CA$ (§. 34. III. Zuſ.), mithin liegt F außer dem Kreiſe, das iſt, jeder Punct, A ausgenohmen, liegt außerhalb dem Kreiſe, folglich iſt BD eine Tangens (§. 74.)

§. 76.

Lehrſatz:

Eine gerade Linie EH (Fig. 58.), die mit dem Radius am Endpuncte A einen ſchiefen Winkel macht, iſt eine Secans.

Beweis:

Da CA auf EH ſchief ſteht, ſo fälle man aus C ein Loth CG (§. 38.); nun iſt $AC > CG$ (§. 34. III. Zuſ.); alſo liegt G inner dem Kreiſe, folglich durchſchneidet EH die Kreislinie in zwey Puncten (§. 19. I. Zuſ.), und iſt alſo eine Secans.

I. Zuſatz: Eine Tangens ſteht am Berührungspuncte auf dem Radius ſenkrecht; denn ſtünde ſie ſchief, ſo würde ſie eines Secans ſeyn (Lehrſ.)

II.

II. Zusatz: Für jeden Punct der Peripherie giebt es nur eine Tangens; denn durch jeden Punct giebt es nur einen Perpendikel auf den Radius (§. 37. Zus.).

III. Zusatz: Wenn man auf die Tangens einen Perpendikel durch den Berührungspunct A errichtet, so geht er durch den Mittelpunct C des Kreises; denn sonst konnte man vom Mittelpuncte zum Berührungspuncte den Radius ziehen, dieser stünde ebenfalls auf die Tangens durch A lothrecht (I. Zus.), und es gäbe durch A zwey Perpendikel auf sie, gegen ((§. 37. Zus.).

IV. Zusatz: Zwischen der Tangens und dem Bogen läßt sich durch A keine gerade Linie ziehen, denn jede gerade Linie durch A, die nicht mit der Tangens zusammenfällt, steht auf dem Radius schief, ist also eine Secans (Lehrs.), fällt also innerhalb dem Kreise.

V. Zusatz: Der Winkel zweyer Secanten außerhalb dem Kreise ist der halben Differenz der Bögen gleich, welche die Secanten abschneiden; das ist (Fig. 59.) $A = \frac{1}{2}(BD - EF)$.

Denn man ziehe die Sehne BF, so ist $x = A + r$ (§. 47. VII. Zus.)

mithin $A = x - r$,

nun ist $x = \frac{1}{2}BD$, $r = \frac{1}{2}EF$ } (§. 72. I. Zus.)

also $A = x - r = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}(BD - EF)$.

§. 77.

§. 77.

Aufgabe:

Durch einen gegebenen Punct A an der Peripherie eine Tangens zuziehen (Fig. 58.).

Auflösung:

Man ziehe den Radius CA, durch A errichte man den Perpendikel AD (§. 48.), so ist solcher die verlangte Tangens (§. 75.)

§. 78.

Lehrsatz:

Von den beyden Winkeln, welche die Tangens DF (Fig. 60.) mit der Sehne AB macht, ist I der spitzige BAD so groß als der Peripheriewinkel AEB, welcher auf ihren kleinen Bogen AGB steht, und II der stumpfe Winkel BAF ist dem Peripheriewinkel AGB gleich, welcher auf dem größern Bogen BEA der Sehne steht.

Beweis:

1. Man ziehe den Diameter AE, und die Sehne BE so ist $ABE = 90°$ (§. 72. III. Zus.); also auch

2. $BAE + AEB = 90°$ (§. 47. VI. Zus.),
   $DAB + BAE = 90°$ (§. 76. I. Zus.).

Also $DAB + BAE = BAE + AEB$
Folglich ist $DAB = AEB$.

3. AEB + AGB = 180° (§. 72. V. Zus.)
DAB + BAF = 180° (§. 14. II. Zus.)

Also DAB + BAF = AEB + AGB
DAB = AEB (Nr. 2.)

Mithin II BAF = AGB.

Zusatz: Die Winkel, welche die Tangens mit einer Sehne macht, sind den halben Bögen gleich, die zwischen ihnen liegen.

Denn DAB = AEB = ½ arc. AGB
BAF = AGB = ½ arc. BEA } (§. 72. 1. Zus.)

§. 79.

Aufgabe:

Von einem ausser dem Kreise gegebenen Puncte K, (Fig. 61.) zwey Tangenten zu ziehen, die auf verschiedenen Seiten von CK liegen.

Auflösung:

1. Man ziehe die gerade Linie CK,
2. durch A erreichte man auf sie den Perpendikel BD,
3. aus C beschreibe man mit CK einen Kreis, welcher den Perpendikel in zwey Puncten B, D durchschneiden wird (§. 19.)
4. Von C ziehe man an diese Durchschnittspuncte die geraden Linien CB, CD, welche die Kreislinie ebenfalls in F und G durchschneiden;

5) wenn man endlich die geraden Linien KF, KG zieht, so sind sie die verlangten Tangenten.

Beweis:

$CA = CF$

$CB = CK$ (Nr. 3.)

$ACB = FCK$

$\triangle ACB \sim \triangle FCK$ (§. 24.)

Folglich $CFK = BAC = 90°$ Nr. 2.

Mithin KF eine Tangente (§. 75.)

Auf die nemliche Art läßt sich erweisen, daß $CGK = 90°$ mithin KG eine Tangente ist.

Zusatz: Die aus einem Puncte K zu beyden Seiten gezogenen Tangenten KF und KG sind einander gleich, denn $CK = CK$; $CF = CG$; $CFK = CGK = 90°$, mithin $\triangle CFK \sim \triangle CGK$ (§. 38. IX. Zus.) und $FK = GK$.

III. Hauptstück.

Von Verhältnissen gerader Linien.

I. Abschnitt.

Von Verhältnissen gerader Linien in geradlinigten ebenen Figuren.

§. 89.

Erklärungen:

a. Eine gerade Linie Messen heißt ihr Verhältniß zu einer geraden Linie von bekannter Länge (zum Maaße) bestimmen (S. 2. Arithm.)

b. Die gerade Linie, die zum allgemeinen Längenmaaße dient, heißt ein Fuß oder Schuh, ihr zehnter Theil ein Zoll, der zehnte Theil des Zolles eine Linie, der zehnte Theil einer Linie ein Scrupel.

c. Die Länge von 10 Fuß heißt eine geometrische Ruthe.

d. Man drückt Ruthe, Fuß, Zoll, Linien, Scrupel durch die Rechts Oben an die Zahlen gesetzte Zeichen (o, ', '', ''', '''',) aus; z. B. 25° 8' 5'' 4''' 3'''' liest man: 25 Ruthen, 8 Fuß, 5 Zoll, 4 Linien 3 Scrupel.

1. Zusatz: Eine Linie wird gemessen, wenn man ihre Länge durch Ruthen, Fuß, Zolle u. s. w. angiebt.

II. Zusatz: Zwey Linien stehen nur in so ferne in einem geometrischen Verhältnisse, in wie ferne sie gezählte Größen sind, das ist, in wie ferne ihre Größen durch ein gemeinschaftliches Maaß in Zahlen bestimmet sind. (§. 197. Arithm.) — —

III. Zusatz: Auf Verhältnisse und Proportionen der Linien lassen sich alle arithmetische Proportionsgesetze anwenden.

Anmerkung: Wenn AB, BC, AC Linien bezeichnen, so zeigen die Ausdrücke $AB \times BC$, $\frac{AB.BC}{BC}$, AB^2, $\sqrt{AB}$ in der Folge Producte, Quotienten, Quadrate, Quadratwurzeln nicht von Linien, sondern von Zahlen an, die man erhält, wenn man diese Linien durch ihr gemeinschaftliches Maaß mißt.

§. 83.

Lehrsatz:

Wenn man auf einem Schenkel AB (Fig. 82.) des Winkels A eine beliebige Anzahl gleicher Theile aufträgt, so theilen die durch die Theilungspuncte a, b, c und s. f. gezogenen Parallelen den andern Schenkel in eben so viele gleiche Theile.

Beweis:

1. Man kann offenbar durch a so eine Linie ziehen, welche AC in α durchschneidet, folglich wird auch AC alle durch b, c, d, e gezogene Parallelen in β, γ, δ, ε durchschneiden (§. 45. II. Zus.)

2.

2. Durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ziehe man mit AB die Parallelen αo, βp, γq, δr, so ist

3. $\alpha o = ab$, $\beta p = bc$, $\gamma q = cd$, $\delta r = de$ (§. 45. IV. Zuf.)
mithin auch $\alpha o = Aa = \beta p = \gamma q = \delta r$ (per hyp.), also

4. $\alpha o = Aa$
$o = b = a$
$\alpha = A$
} (§. 45. Nr. II.)

$\Delta \alpha o \beta \cong \Delta Aa\alpha$ (§. 26.) und $\alpha\beta = A\alpha$.

5. Auf ähnliche läßt sich darthun daß $\Delta \beta p \gamma \cong \Delta Aa\alpha$, mithin $\beta\gamma = A\alpha = \alpha\beta$.

6. Eben so leuchtet dieses bey den folgenden Theilen $\gamma\delta$, δe, mithin allgemein ein.

Zusatz. Wenn dem Theile Aa des einen Schenkels in voriger Construction der Theil $A\alpha$ entspricht, so gehört zu $Ab = 2Aa$ der Theil $A\beta = 2A\alpha$, und wenn $Ae = 5Aa$, so ist auf dem andern Schenkel $Ae = 5A\alpha$, und also überhaupt, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, so gehört zu nAa des einen Schenkels der Theil $nA\alpha$ auf dem andern Schenkel.

§. 82.

Lehrsatz:

Wenn im Dreyecke ABC (Fig. 63.) zu einer Seite BC die Parallele DE gezogen wird, so sind die abgeschnittenen

schnittenen Stücke der zwey Seiten der ganzen und unter sich proportionirt, das ist

wenn DE ∥ BC, so ist

I. AD : AB = AE : AC

II. DB : AB = EC : AC

III. AD : DB = AE : EC.

Beweis von I.

Wenn AB = nAD, und n eine ganze Zahl ausdrückt, so ist AC = n(AE, (§. 81. Zus.), folglich auch überhaupt bey jedem Verhältnisse zwischen AB und AD ist AD : AB = AE : AC (§. 267. Arithm.).

Beweis von II.

AD : AB = AE : AC Nr. I.

AB : AC = AD : AE (§. 213. Arithm.)

AB − AD : AC − AE = AB : AC (§. 214. Ar.)

das ist BD : EC = AB : AC

oder BD : AB = EC : AC.

Beweis von III.

AD : AB = AE : AC Nr. I.

DB : AB = EC : AC Nr. II.

Folglich AD : DB = AE : EC (§. 218. Nr. II. Arithm.)

§. 83.

Lehrsatz: (Fig. 63.)

Wenn im Dreyecke ABC zur Seite BC die Parallele DE gezogen wird, so verhält sich jedes abgeschnittene Stück der zwey übrigen Seiten zur ganzen Seite, wie die gezo-

gezogene Parallele DE zur dritten Seite BC; d. i. wenn DE ∥ BC, so ist AE:AC = DE:BC
und AD:AB = DE:BC.

Beweis:

Durch E ziehe man mit AB die Parallele EF; so ist
DE = BF (§. 45. IV. Zus.) und
AE:AC = BF:BC (§. 82. Nr. II.)
das ist AE:AC = DE:BC = AD:AB (§. 82. Nr. I.)

§. 84.

Lehrsatz: (Fig. 63.)

Wenn in einem Dreyecke ABC eine Linie DE zwey Seiten in proportionirte Theile theilet, so ist sie zur dritten Seite BC parallel; das ist,
wenn I. AD:AB = AE:AC
oder II. AD:DB = AE:EC } so ist DE ∥ BC.

Beweis von I.

Wenn DE zu BC nicht parallel wäre, so könnte man durch D eine andere De zu BC parallel ziehen, und es würde
AD:AB = Ae:AC seyn (§. 82. Nr. I.)
ferner AD:AB = AE:AC (per hyp.)
mithin Ae = AE gegen (§. 19. 3. Arith.), folglich muß De mit DE zusammen fallen, und DE ∥ BC.

Beweis von II.

Wenn AD:DB = AE:EC, so ist
AD + DB : AE + EC = AD:AE (§. 214. I. Zus. Ar.)
das ist AB:AC = AD:AE
Folglich DE ∥ AC Nr. I.

§. 85.

§. 85.

Lehrsatz:

Wenn im Dreyecke AEB (Fig. 64.) eine gerade Linie ED einen Winkel E halbirt, so sind die zwey Seiten der entgegenstehenden Seite den übrigen zwey Seiten proportionirt, das ist,

wenn $o = r$; so ist $AD : DB = AE : EB$.

Beweis:

Man verlängere eine Seite AE, welche den getheilten Winkel mit einschließt, nehme EC der andern Seite BE gleich, und ziehe BC; so ist

2. $o + r = 2m$ (§. 47. VIII. Zus.)
oder $2o = 2m$, also $o = m$, folglich
DE ∥ BC (§. 42. Nr. II.) und
$AD : DB = AE : EC$ (§. 82. Nr. III.) folglich
$AD : DB = AE : EB$ Nr. I.

§. 86.

Lehrsatz:

Wenn eine Linie DE im Dreyecke eine Seite den übrigen proportionirt schneidet, so theilet sie den opponirten Winkel E in zwey gleiche Theile; das ist,

wenn $AD : DB = AE : EB$, so ist $o = r$.

Beweis:

1. Man nehme wieder auf der verlängerten Seite AE die Linie $EC = EB$, und ziehe BC;

2. Da nun $AD : DB = AE : EB$, so ist auch
$AD : DB = AE : EC$, folglich

3.

3. DE ∦ BC (§. 84. Nr. II., also o = m (§. 45. Nr. II.) und 2o = 2m;
ferner ist o + r = 2m (§. 47. VIII. Zus.)
Also o + r = 2o, folglich o = r.

o = m
m = n
n = r
also r = o

§. 87.

Aufgabe.

Eine gerade Linie AC (Fig. 62.) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile z. B. in 5 Theile theilen.

I. Auflösung:

1. Man verzeichne einen beliebigen Winkel BAC,
2. auf den einen Schenkel AB trage man die beliebige Länge Aa so vielmal auf, als Theile verlangt werden, nemlich Aa, ab, bc, cd, de.
3. Auf dem andern Schenkel nehme man die gegebene Linie AC, und
4. ziehe eC, und mit solcher
5. durch die Puncte d, c, b, a die Parallelen dδ, cγ, bβ, aα; so sind die Theile von AC, nemlich Aα, αβ u. s. f. einander gleich (§. 81.)

II. Auflösung:

Man messe die gegebene Linie, und dividire die Zahl, welche ihre Länge angiebt, durch die verlangte Anzahl der Theile, so giebt der Quotient die Größe eines Theiles im gebrauchten Maaße.

§. 88.

Aufgabe:

Eine gegebene Linie AC (Fig. 65.) in mehrere, z. B. 3 Theile theilen, die ein bestimmtes Verhältniß AD : DE : EB unter sich haben sollen.

I. Auflösung:

1. Man verzeichne einen beliebigen Winkel, und trage auf dem einen Schenkel die Linien AD, DE, EB der Ordnung nach auf.

2. auf dem andern Schenkel nehme man die gegebene Linie AC, und ziehe BC.

3. Mit letzterer verzeichne man die Parallelen Ee, Dd, so werden

4. I. Ad : de = AD : DE, II. Ad : eC = AD : EB, endlich III. de : eC = DE : EB seyn.

Beweis:

Offenbar ist I. AD : DE = Ad : de (§. 82. N. III.)
Eben so ist AD : AE = Ad : Ae
und AE : EB = Ae : eC

---

mithin II. AD : EB = Ad : eC (§. 218. N. II. Arith.)
Aus I. und II. wird endlich III. DE : EB = de : eC.

II. Auflösung:

Man messe die Linie AC, so wie die andern AD, DE, EB mit einerley Maaß, und bestimme die Theile aus §. 215. Arithm.

§. 89.

Aufgabe:

Zu drey gegebenen Linien AD, DB, AE (Fig. 63.) die vierte geometrische Proportionallinie finden.

I. Auflösung:

1. Man verzeichne einen beliebigen Winkel, und trage
2. auf dem einen Schenkel die Linien AD, BD, und
3. auf dem andern Schenkel die dritte gegebene Linie AE auf, und ziehe DE.
4. Durch B verzeichne man zu DE die Parallele BC, so ist
5. AD : DB = AE : EC (§. 82. III.), folglich EC die gesuchte vierte geometrische Proportionallinie.

II. Auflösung:

Man messe die drey gegebenen Linien durch einerley Maaß, und suche zu den gefundenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl (§. 211. Arith).

§. 90.

Aufgabe:

Zu zwey gegebenen Linien AD, DE (Fig. 66.) die dritte geometrische Proportionallinie suchen.

I. Auflösung:

1. Man verzeichne einen beliebigen Winkel, und trage
2. auf den einen Schenkel die Linien AD, DE auf,

3. Aus A nehme man auf dem andern Schenkel Ad = DE, und ziehe Dd;

4. Durch E endlich verzeichne man mit Dd die Parallele Ee; so ist AD : DE = Ad : de (§. 82. N. III.), das ist AD : DE = DE : de (Nr. 3.) folglich ist de die verlangte dritte Proportionallinie.

II. Auflösung:

Man bestimme AD, DE durch einerley Maaß, und suche zu ihren Zahlen die dritte Proportional (§. 212. Arithm.).

§. 91.

Lehrsatz:

Zwey ebene geradlinichte Figuren sind ähnlich, wenn

a. die Anzahl der Seiten in beyden einerley,

b. die Winkel der Ordnung nach gleich, und

c. jedes Paar homologer Seiten, das ist, solcher, die gleiche Winkel einschliessen, oder ihnen entgegenstehen, einander proportionirt sind.

Beweis: Aehnlich sind Figuren von einerley Qualität, (§. 1. Arithm.); nun aber in ebenen geradlinichten Figuren besteht offenbar die Qualität in der Anzahl, Lage und dem Verhältnisse der Seiten, wenn also in geradlinichten Figuren diese gleich sind, so haben sie einerley Qualität, und sind also einander ähnlich.

I. Zusatz: Zwey Figuren, die einer dritten ähnlich sind, sind es auch unter sich; denn da sie mit der dritten einerley Qualität haben, so haben sie auch unter sich die nemliche.

II. Zusatz: Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn sie die Winkel gleich haben, und alle ihre Seiten einander proportionirt sind.

III. Zusatz: Reguläre Figuren von gleichviel Seiten sind ähnlich; denn sie haben gleiche Winkel (§. 56. I. Zus.), und überdieß ist aus dem Begriffe die Anzahl und Verhältniß der Seiten in beyden gleich.

§. 92.

Lehrsatz:

Wenn im Dreyecke (Fig. 63.) zu einer Seite BC die Parallele DE gezogen wird, so ist das kleinere Dreyeck ADE dem ganzen △ ABC ähnlich.

Beweis:

1. A = A, ferner D = B, E = C (§. 45. Nr. II.)
2. AD : AB = AE : AC (§. 82. Nr. 1.)
3. AD : AB = DE : BC (§. 83.)
4. AE : AC = DE : BC (§. 218. Nr. I. Arithm.)

Folglich sind alle Winkel gleich (Nr. 1.), und alle drey Seiten proportionirt (Nr. 2 — 4.), mithin ist △ ADE ∽ △ ABC (§. 91. II. Zus.)

§. 93.

4. Ferner ist

AD : AB = DE : BC, (§. 83.)

und ab : AB = bc : BC (per hyp.); also

AD : ab = DE : bc (§. 218. N. H. Arithm.);

mithin, da AD = ab, so ist

bc = DE, mithin △ ADE ≅ △ abc (§. 28.)

Folglich △ abc ∽ △ ABC (§. 91. I. Zus.)

§. 96.

Lehrsatz:

Wenn in rechtwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 69.) vom rechten Winkel auf die Hypothenuse ein Perpendikel gezogen wird, so sind die zwey neuen Dreyecke dem Ganzen und unter sich ähnlich; das ist △ ABD ∽ △ ABC ∽ △ BDC.

Beweis:

1. Denn D = B = 90°; A = A; folglich △ ABD ∽ △ ABC (§. 93. Zus.)

2. D = B = 90°; C = C; mithin auch △ BDC ∽ △ ABC, und

3. △ ABD ∽ △ BDC. (§. 91. I. Zus.)

I. Zusatz: Wenn man aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuse im rechtwinklichten Dreyecke ABC den Perpendikel BD zieht, so ist solcher die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken der Hypothenuse, das ist AD : BD = BD :

Denn

Denn $\triangle ABD \sim \triangle BDC$, und zwar $A = c$; $r = C$; mithin $AD : BD : DC$ (§. 91.).

II. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreyecke, wenn man die Seiten mit einerley Maaß mißt, mithin ihre Größe in Zahlen bestimmt, so ist die Quadratzahl der Hypothenuse, den Quadratzahlen der beyden Catheten gleich, oder wie man sich der Kürze wegen ausdrückt. $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Denn man ziehe aus B auf die Hypothenuse AC das Loth BD, so ist $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (Lehrs.); also $AD : AB : AC$; und $AB^2 = AD \cdot AC$; ferner $\triangle CBD \sim \triangle ABC$; $DC : BC : AC$, und $BC^2 = DC \cdot AC$ (§. 210. V. Zus.) mithin $AB^2 + BC^2 = AD \cdot AC + DC \cdot AC = (AD + DC)\, AC = AC^2$.

III. Zusatz: Man bekömt die Quadratzahl eines Catheten, wenn man von dem Quadrate der Hypothenuse die Quadratzahl des andern Catheten abzieht; das ist $AB^2 = AC^2 - BC^2$ und $BC^2 = AC^2 - AB^2$.

§. 97.

Aufgabe:

Aus zwey gegebenen Seiten eines rechtwinklichten Dreyeckes die dritte Seite bestimmen.

Auflösung:

1. Man messe die gegebenen Seiten mit einerley Maaß, und quadrire die gefundenen Zahlen;

2. Suchet man die Hypothenuse, so ziehe man aus der Summe (§. 96. II. Zus.);

3. Suchet man einen Catheten, so ziehe man aus der Differenz der Quadratzahlen die Quadratwurzel aus. (§. 96. III. Zuſ.)

Z. B. Wenn von den beyden Catheten der eine 3, der andere 4 Fuß lang iſt; ſo iſt die Hypothenuſe $= \sqrt{(9+16)} = 5$ Fuß.

§. 98.

Lehrſatz:

Wenn man in ähnlichen Dreyen (Fig. 70 und 71.) ein Paar homologer Seiten AC, ac als Grundlinien annimmt, ſo verhalten ſie ſich wie die Höhen der Dreyecke, das iſt AC : ac = BD : bd.

Beweis:

1. Die Perpendikel BD, bd von der Spitze auf die Grundlinie, oder die Höhen mögen zwiſchen den beyden übrigen Seiten (Fig. 70.) oder außer denſelben (Fig. 71.) liegen, ſo iſt

2. allemal $D = 90° = d$; $C = c$; alſo $\triangle BCD \sim \triangle bcd$ (§. 93. Zuſ.) mithin

3. BD : bd = BC : bc (91); vermög der Annahme aber iſt BC : bc = AC : ac

alſo AC : ac = BD : bd.

§. 99.

Lehrſatz:

Aehnliche geradlinigte Figuren (Fig. 45.) werden durch ähnliche Diagonalen in lauter ähnliche Dreyecke getheilet.

Be-

PARSONS LIBRARY
University of
MICHIGAN

Beweis:

1. $\triangle ABC \sim \triangle abc$ (§. 94.) mithin
2. der Winkel $ACB = acb$, $AC : ac = BC : bc = CD : cd$
   Und $C - ACB = c - acb$
   das ist $ACD = acd$; und also
3. $\triangle ACD \sim \triangle acd$.
4. Auf ähnliche Art läßt sich der Beweis für jedes folgende Dreyeck fortsetzen.

§. 100.

Lehrsatz:

In ähnlichen geradlinigten Figuren verhalten sich die Perimeter, wie jedes Paar homologer Seiten, oder Diagonalen; das ist PERIM : perim. = AB : ab = AC : a c

Beweis:

1. Vermöge der Annahme ist: $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = FG : fg = GA : ga$, mithin
2. $AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA : ab + bc + cd + de + ef + fg + ga = AB : ab$ (§. 214. II. Zus. Arithm.) das ist $PER : per. = AB : ab$
3. Nun ist auch $AB : ab = AC : ac$ (§. 99.), also ebenfalls $PER : per. = AC : ac$.

II. Abschnitt.

Von Verhältnissen gerader Linien im Kreise.

§. 101.

Lehrsatz:

Wenn man aus einem beliebigen Punct D der Peripherie ein Loth auf den Diameter (Fig. 72.), oder durch einen beliebigen Punct E des Diameters einen Perpendikel bis an die Peripherie zieht, so ist solcher die mittlere geometrische Proportional zwischen den Segmenten des Diameters, das ist

AE : DE : EB.

Beweis:

Man ziehe die Sehnen AD, BD, so ist ADB = 90° (§. 72. III. Zus.

folglich AE : ED : EB (§. 96. I. Zus.).

Zusatz. Da der Punct E beliebig ist, so sind AE sowohl als DE veränderliche Größen, man setze also AE = x; DE = y; den unveränderlichen Diameter AB = a, so wird EB = a − x; mithin x : y : a − x; folglich $y^2 = ax - x^2$.

§. 102.

Aufgabe:

Zu zwey gegebenen Linien AE, EB die mittlere geometrische Proportionallinie finden.

I. Auflösung:

1. Man trage neben einander auf einer graden Linie die beyden gegebenen AE und EB auf,

2. theile AB in zwey gleiche Theile in C, und beschreibe aus letzterm Puncte mit AC einen Kreis.

3. Durch E errichte man den Perpendikel ED bis an die Peripherie, so ist solcher die verlangte mittlere geometrische Proportionallinie (§. 101.)

II. Auflösung:

Man bestimme die Größen von AE, EB durch einerley Maaß in Zahlen, und ziehe aus dem Products derselben die Quadratwurzel aus, oder $DE = \sqrt{AE.BE}$ (§. 212. Arithm.)

§. 103.

Lehrsatz:

Wenn sich im Kreise (Fig. 73.) zwey Sehnen durchschneiden, so sind die abgeschnittenen Stücke einander umgekehrt proportionirt; das ist: AE:EC = DE:BE.

Beweis:

1. Man ziehe AC, BD; so ist

2. $AEC = DEB$; $CAB = CDB$, und $ACD = ABD$ (§. 72. II. Zus.) also

3. $\triangle AEC \sim \triangle DEB$ (§. 93.) und
$AE:CE = DE:BE$.

§. 104.

§. 104.

Lehrsatz:

Im Kreise liegt von zwey ungleichen Sehnen die gröſsere dem Mittelpuncte näher, und umgekehrt, wenn zwey Sehnen ungleich vom Mittelpuncte entfernt sind, so ist jene gröſser, die näher liegt, das ist (Fig. 74.)

I. Wenn $EF > AB$, so ist $CG < CD$.

II. Wenn $CG < CD$, so ist $EF > AB$.

Beweis:

$AD = \frac{1}{2} AB$; $FG = \frac{1}{2} EF$ (§. 60. I. Zus.)

I. $EC^2 = AC^2$ (§. 17. I. Zus.)

$EG^2 > AD^2$ (per hyp.)

$EC^2 - EG^2 < AC^2 - AD^2$ (§. 30. Nr. 4. Arithm.)

oder $CG^2 < CD^2$ (§. 96. III. Zus.)

und $CG < CD$.

II. $EC^2 = AC^2$

$CG^2 < CD^2$

$EC^2 - CG^2 > AC^2 - CD^2$

$EG^2 > AD^2$

$EG > AD$

das ist $\frac{1}{2} EF > \frac{1}{2} AB$ folglich

$EF > AB$.

§. 105.

Lehrsatz:

Die Tangens ist die mittlere geometrische Proportional zwischen dem Stücke DE (Fig. 75.) der Secante

außer

außer dem Kreiſe, und der ganzen Secante, wenn ſie auf dem Diameter ſteht; das iſt: DE : AD : DB.

Beweis:

Man ziehe die Sehne AE; ſo iſt AEB = 90° (§. 72. III. Zuſ.); mithin △ ADE ∽ △ ADB (§. 96.); folglich DE : AD : DB.

§. 106.

Lehrſatz:

Im Winkel zweyer Secanten außer dem Kreiſe verhalten ſich die beyden Stücke außer dem Kreiſe umgekehrt wie die ganzen Secanten, das iſt (Fig. 76.)

AD : AE = AC : AB.

Beweis:

1. Man ziehe die Sehnen DE, BD, ſo iſt
2. n + r = 180° (§. 14. II. Zuſ.) = r + y (§. 72. V.) mithin n = y.
3. Eben ſo iſt m + o = o + x; alſo m = x, folglich
4. △ ADE ∽ △ ABC, und

AD : AE = AC : AB (§. 91.)

§. 107.

Aufgabe:

Aus der gegebenen Größe des Radius AC (Fig. 49.) und der Sehne AB, ihre Entfernung CD vom Mittelpuncte des Kreiſes angeben.

Auf-

Auflösung:

$CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)}$ (§. 97.)

Nun ist $AD = \frac{1}{2}AB$ (§. 60. I. Zus.), also $AD^2 = \frac{1}{4}AB^2$, folglich $CD = \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)}$.

I. Zusatz: Bezeichnet man überhaupt den Radius eines Kreises mit r, die Sehne durch c, ihre Entfernung vom Mittelpuncte mit f; so ist $f = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$.

II. Zusatz: Setzet man die Sehne dem Radius gleich, und letztern $= 1$, oder für $c = r = 1$ wird $f = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 1{,}7320508$, also $f = 0{,}8660254$.

§. 108.

Aufgabe:

Aus dem gegebenen Radius $AC = r$; der Sehne $AB = c$ die Sehne AE des halben Bogens bestimmen.

Auflösung:

1. Man setze $CD = f$; so ist

2. $DE = CE - f = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$ (§. 107. I. Zus.), und

3. $DE^2 = r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)} + r^2 - \frac{1}{4}c^2$ (§. 120. Arith.)

$= 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)} - \frac{1}{4}c^2$

4. $AD = \frac{1}{2}AB$ (§. 60. I. Zus.) $= \frac{1}{2}c$, mithin $AD^2 = \frac{1}{4}c^2$

5. $AE^2 = AD^2 + DE^2$ (§. 96. II. Zuf.)

$= \frac{1}{4}c^2 + 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)} - \frac{1}{4}c^2$

(Nro. 3. 4.)

$= 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$

6. $AE = \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)})}$

Zusatz: Setzet man $r = c = 1$; so ist

$AE^2 = 2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = 2(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}) = 2 - \sqrt{3}$

$= 2 - 1{,}7320508 = 0{,}2679492.$

Folglich $AE = 0{,}5177\ldots$

so haben sie noch einen Punct gemein, und durchschneiden also einander; denn man ziehe die Radien AC, BC, so bilden sie ein Dreyeck mit der Centrallinie AB, worinn sind zwey von diesen drey Linien zusammen größer, als die dritte (§. 35.), und die Kreislinien haben also noch einen Punct gemein, oder schneiden einander (IV. Zus.).

§. 110.

Lehrsatz:

Von zwey Kreislinien (Fig. 81.) die einander schneiden, und deren Mittelpuncte sich auf einer Seite der gemeinschaftlichen Sehne befinden, liegt im kleinern Abschnitte der Bogen CHD des größern Kreises zwischen der gemeinschaftlichen Sehne, und dem Bogen CGD des kleinern Kreises.

Beweis:

1. An dem Durchschnittspuncte C ziehe man für beyde Kreise die Tangenten CE, CF (§. 77.).
2. Da nun $ACE = 90°$ (§. 76. I. Zus.) $= BCF$; so ist
3. $BCE > 90°$; hingegen $BCD < 90°$ (§. 32. III. Zus.). Folglich
4. liegt CF zwischen CE und CD; es liegt aber auch
5. der Bogen CG zwischen CE und CF, und der Bogen CH zwischen CF und CD (§. 76. IV. Zus.). Folglich

6. liegt bey C der Bogen CH vom gröſsern Kreiſe, zwiſchen dem Bogen CG des kleinern Kreiſes, und der Sehne CD.

7. Eben ſo liegt bey D der Bogen DH zwiſchen dem Bogen DG und der Sehne DC; folglich

8. liegt der ganze Bogen CHD vom gröſsern Kreiſe zwiſchen dem Bogen CGD des kleinern Kreiſes, und der gemeinſchaftlichen Sehne CD, denn ſonſt müſsten ſich dieſe Bögen zwiſchen C und D noch in einem Puncte durchſchneiden gegen (§. 62. II. Zuſ.)

I. Zuſatz: Der Bogen CHD vom gröſsern Kreiſe iſt weniger erhaben, oder er iſt flächer als der Bogen CGD des kleinern Kreiſes.

II. Zuſatz: Nimmt man in der geraden Linie durch beyde Mittelpuncte A, B einen beliebigen Punct K, ſo geht ein Kreis mit dem Halbmeſſer CK aus K durch den Punct D, denn CK iſt = KD (§. 38. III. Zuſ.)

III. Zuſatz: Je gröſser man den Halbmeſſer CK nimmt, das iſt, je weiter der Mittelpunct von der Sehne CD auf der Seite, wo A, B liegen, entfernt iſt, deſto flächer wird der Bogen, deſto mehr nähert er ſich alſo ſeiner Sehne.

IV. Zuſatz: Eine gerade Linie kann als Bogen eines Kreiſes mit einem unendlich groſsen Halbmeſſer betrachtet werden.

§. 111.

§. 111.

Lehrsatz:

Zwey Kreise, die an einem Puncte G ihrer Peripherien (Fig. 78. und 79.) eine gemeinschaftliche Tangens EF haben, sind Berührungskreise (§. 109.)

Beweis:

1. Liegen die Mittelpuncte der Kreise auf verschiedenen Seiten des Tangens wie (Fig. 78.), so ist der Satz für sich einleuchtend; denn die Kreise selbst liegen ganz auf verschiedenen Seiten dieser Tangens.

2. Liegen hingegen (Fig. 79.) die beyden Mittelpuncte auf der nemlichen Seite den Tangens, so errichte man durch G auf die Tangens einen Perpendikel, welcher durch beyde Mittelpuncte gehen wird (§. 76. III. Zus.), und nehme in der größern Kreislinie um B einen beliebigen Punct D, und ziehe BD, AD, GD; so ist

3. BDG = BGD (§. 25. I. Zus.)

4. Ferner ADG < BDG, mithin auch

5. ADG < BGD, das ist ADG < AGD, also

6. AD > AG (§. 35. I. Zus.); folglich

7. Haben die Kreislinien nur den Punct G gemein, und jeder andere Punct D der größern Kreislinie liegt außerhalb dem kleinen Kreise um A.

I. Zusatz: In zwey Berührungskreisen liegen die beyden Mittelpuncte mit dem Berührungspuncte, oder

A, B, G

A, B, G in einer geraden Linie; denn sonst durchschnitten sie einander. (§. 109. VI. Zus.)

II. Zusatz: Zwey Berührungskreise haben am Berührungspuncte G die gemeinschaftliche Tangens EF; denn man errichte durch G auf die Tangens des Kreises um A einen Perpendikel, so liegt in ihm der Mittelpunct A (§. 76. III. Zus.), und auch B (I. Zus.) folglich steht EF auf beyden Radien AG, BG senkrecht, und ist also eine Tangens beyder Kreise (§. 75.)

III. Zusatz: Von zwey Berührungskreisen, die auf einer Seite der Tangens liegen, entfernt sich der Bogen GD des größern Kreises weniger von der Tangente, als der Bogen des kleinern Kreises.

IV. Zusatz: Die Tangens läßt sich als ein Bogen vom Kreise mit einem unendlich großen Halbmesser betrachten.

§. 112.

Aufgabe:

Durch einen gegebenen Punct G zwey Berührungskreise zu beschreiben.

Auflösung:

1. Durch G ziehe man eine gerade Linie HI oder GI, und

2. nehme auf ihr entweder auf verschiedenen Seiten von G (Fig. 78.), oder auf der nemlichen Seite (Fig. 79.) zwey beliebige Puncte A, B.

3. Aus A beſchreibe man mit AG, und aus B mit BG Kreiſe; ſo ſind ſie die verlangten Berührungskreiſe.

Beweis:

Durch G errichte man auf HI (Fig. 78) und GI (Fig. 79.) den Perpendikel FE, ſo ſteht ſolcher am Endspuncte G beyder Radien GA, GB ſenkrecht, und iſt eine gemeinſchaftliche Tangens durch G für beyde Kreiſe (§. 75.), folglich ſind letztere Berührungskreiſe (§. 111.)

§. 113.

Aufgabe:

Aus der gegebenen Centrallinie AB, und den Radien AG, BH zweyer Kreiſe in einer Ebene, für ſie auf einer Seite der Centrallinie, eine gemeinſchaftliche Tangens zu ziehen.

Auflöſung I. Wenn die Radien gleich ſind (Fig. 83.) Man errichte durch die beyden Mittelpuncte A, B die Perpendikel AD, BE auf die Centrallinie, durch D, E ziehe man die gerade Linie DE, ſo iſt ſolche die verlangte gemeinſchaftliche Tangens.

Beweis:

AD $\overline{\overline{\parallel}}$ BE (§. 17. I. Zuſ. und §. 42. Nr. I.) mithin DE $\overline{\overline{\parallel}}$ AB (§. 51. VII. Zuſ.), und D = E = 90° (§. 51. III. Zuſ.), folglich DE die gemeinſchaftliche Tangens (§. 75.)

Auf-

Auflösung II. Wenn die Radien ungleich sind (Fig. 84.)

1. Man halbire die Centrallinie AB in C, und beschreibe aus C mit CA einen Halbkreis.
2. Auf diesen trage man aus A die Sehne AF = AG — BH auf, und verlängere solche bis D.
3. Durch B ziehe man zu AD die Parallele BE.
4. Die gerade Linie DE wird die verlangte gemeinschaftliche Tangens seyn.

Beweis:

Man ziehe BF; so ist BFA = 90° (§. 72. III. Zus.).
Ferner DF = AD — AF = AG — (AG — BH) Nr. 2.
= BH = BE;
mithin DF ∥ BE (Nr. 3.), und DE ∥ BF (§. 51. VII. Zus.), also BFA = D (§. 45. Nr. II.) = 90° = E (§. 51. III. Zus.)
Folglich DE die gemeinschaftliche Tangens (§. 75.)

§. 114.

Aufgabe:

Aus der gegebenen Centrallinie AB (Fig. 85.) und den beyden Radien AG, BH eine gemeinschaftliche Tangens zu ziehen, welche die beyden Kreise auf verschiedenen Seiten der Centrallinie berühret.

I. Auflösung:

1. Man halbire die Centrallinie AB in C; und
2. beschreibe aus C mit AC = BC einen Halbkreis,

3. Auf dieſer nehme man die Sehne AF = AC + BH, welche den Kreis mit A um einem Punkte D durchſchneiden wird.

4. Durch B ziehe man mit AF, aber auf der andern Seite der Centrallinie, die Parallele BE.

5. Die gerade Linie DE wird die verlangte gemeinſchaftliche Tangens ſeyn.

Beweis:

Man ziehe die gerade Linie BF, ſo iſt AFB = 90° (§. 72. III. Zuſ.)

Ferner FD = AF − AD = AC + BH − AC (Nr. 3.) = BE, und FD ∥ BE (Nr. 4.),

mithin BE ∥ FB (§. 51. VII. Zuſ.) und ADE = AFB (§. 45. Nr. II.) = 90° = DEB (§. 51. III. Zuſ.)

folglich DE die gemeinſchaftliche Tangens (§. 75.)

II. Abſchnitt.

Von Verhältniſſen der Kreislinien.

§. 144.

Erklärungen.

2. Wenn alle Seiten einer Figur Sehnen eines Kreiſes ſind, ſo heißt die Figur in dem Kreiſe beſchrieben, und der Kreis um ſie beſchrieben, ſo z. B. ſind das Dreyeck ABE (Fig. 60.), das Viereck ABCD (Fig. 57.), und das Vieleck

abdefga (Fig. 86.) in den Kreis, und der Kreis um sie beschrieben.

b. Wenn hingegen alle Seiten einer Figur Tangenten eines Kreises sind, so heißt die Figur um den Kreis beschrieben, und der Kreis in die Figur beschrieben, so sind z. B. das Dreyeck ABD (Fig. 88.), und das Vieleck ABDEFGA (Fig. 86.) um den Kreis, und der Kreis in sie beschrieben.

§. 116.

Aufgabe:

Um ein Dreyeck ABD (Fig. 87.) einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

Man beschreibe eine Kreislinie, welche durch die drey Ecke A, B, D geht (§. 62.), so sind alle Seiten des Dreyeckes Sehnen dieses Kreises, also der Kreis der verlangte (§. 115.).

§. 117.

Aufgabe:

In ein Dreyeck ABD (Fig. 88.) einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

1. Man theile zwey Winkel B, D, die an einer Seite anliegen, durch gerade Linien BC, DC in zwey gleiche Theile.

2. Aus dem Puncte C, wo sich diese Linien durchschneiden, fälle man auf einer Seite den Perpendikel CG, und

3. beschreibe damit einen Kreis, welcher der verlangte ist.

Beweis:

4. $B + D < 180°$ (§. 32. II. Zus.); mithin ist auch $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D$, oder $o + m < 180°$, und BC, DC durchschneiden sich also auf dieser Seite in einem Puncte C (§. 44.).

5. Man ziehe nun auf die andern zwey Seiten AB, AD ebenfalls Lothe CE, CF, so ist

6. $r = o$ (Nr. 1.) $G = E = 90°$ (Nr. 2. u. 5.), $BC = BC$, mithin $\triangle BEC \cong \triangle BCG$ (§. 47. II. Zus.) und $EC = CG$.

7. Eben so ist $m = n$; $G = F = 90°$; $CD = CD$, mithin $\triangle CGD \cong \triangle CFD$, und $CG = CF$, folglich sind

8. CG, CE, CF Radien des Kreises, und auf ihnen stehen die Seiten des Dreyeckes senkrecht, und sind also Tangenten des Kreises (§. 75.), mithin ist der Kreis in das Dreyeck beschrieben.

§. 118.

Lehrsatz:

Wenn eine Kreislinie in n gleiche Theile getheilet ist, und man zieht durch alle Theilungspuncte der Ordnung nach die Sehnen ab, bd, de u. s. f. (Fig. 86.),

so

so erhält man ein in den Kreis beschriebenes reguläres n Eck abdefga.

Beweis:

1. Da alle Bögen gleich sind, so sind auch alle Sehnen (§. 65. II. Zus.), mithin alle Seiten dieser Figur gleich.

2. Jeder Winkel steht auf n—2 solchen Bögen, mithin sind alle einander gleich (§. 72. II. Zus.), folglich ist die Figur regulär (§. 16.).

3. Da sie so viele Seiten bekömmt, als die Kreislinie Theile hat, so ist sie ein reguläres n Eck, und

4. weil alle Seiten Sehnen sind, so ist sie in den Kreis beschrieben (§. 115.).

§. 119.

Aufgabe:

In einen Kreis ein reguläres Viereck zu beschreiben.

Auflösung:

1. Man ziehe (Fig. 89.) zwey auf einander lothrecht stehende Diameter AD, BE,

2. Ferner die Sehnen AB, BD, DE, EA, so erhält man das verlangte Viereck.

Beweis:

Durch die zwey Diameter wird die Kreislinie in vier Quadranten getheilet (§. 66. II. Zus.), mithin geben die vier Sehnen das verlangte Viereck (§. 118.).

Zusatz:

Zusatz: Wenn man die Seiten des Viereckes durch Perpendikel halbirt, so werden auch die Bögen halbirt (§. 73. II. Aufl.), mithin die Kreislinie in acht gleiche Theile getheilet, folglich wenn man die Sehnen zieht, so erhält man ein in den Kreis beschriebenes reguläres Achteck; und auf ähnliche Art läßt sich wieder ein 16 und aus diesem ein 32 Eck u. s. f. in den Kreis beschreiben.

§. 120.

Aufgabe:

In den Kreis ein reguläres Sechseck zu beschreiben. (Fig. 90.)

Auflösung:

Man trage den Radius auf der Peripherie sechsmal auf (§. 69. Zus.), und ziehe die Sehnen.

I. Zusatz: Zieht man die Sehne AD, BF, FA von zweyen Bögen des Sechseckes, so wird ein reguläres Dreyeck ABF in den Kreis beschrieben.

II. Zusatz: Theilet man durch Perpendikeln die Seiten, mithin auch die Bögen vom regulären Sechsecke in zwey gleiche Theile, so erhält man ein reguläres zwölf- und aus diesem auf ähnliche Art ein reguläres vier und zwanzig Eck, u. s. f.

III. Zusatz: Aus einer Seite ab (Fig. 86.) wird ein reguläres Sechseck in den Kreis beschrieben, wenn man auf ihr das gleichseitige Dreyeck aCb verzeichnet (§. 28.), ferner aus C mit Ca einen Kreis beschreibt,

und

und den Radius in der Peripherie austrägt, und Sehnen zieht.

§. 121.

Aufgabe:

Um einen Kreis, in welchen ein reguläres Vieleck abcdefa (Fig. 96.) beschrieben ist, ein Vieleck mit eben so vielen Seiten zu beschreiben.

Auflösung:

1. Man ziehe nach allen Ecken Radien, und verlängere sie.

2. Auf eine Seite ab des im Kreise verzeichneten Vieleckes fälle man vom Mittelpuncte C den Radius CH senkrecht, und ziehe

3. durch H eine Parallele AB zu ab, bis solche von den verlängerten Radien Ca, Cb in A und B durchschnitten wird (§. 45. II. Zus.).

4. Nun nehme man die übrigen verlängerten Radien CD, CE und s. f. jeden = CA.

5. Ziehe die geraden Linien BD, BE u. s. f. so erhält man das verlangte Vieleck.

Beweis:

6. Offenbar hat dieses verzeichnete Vieleck so viele Seiten, als das in den Kreis beschriebene.

7. CH = CH; H = H = 90 (Nr. 2. u. 3.), ACH = BCH (§. 73.), mithin △ ACH ≅ △ BCH (§. 26.), und CA = CB, also

8.

8. sind CA, CB, CD u. s. f. Nr. 4, und alle Centriwinkel (§. 64. II. Zus.) einander gleich, und die Dreyecke ACB, BCD, DCE u. s. f. congruent (§. 24.), mithin die Seiten des Vieleckes AB, BD, DE u. s. f. einander gleich.

9. $a = A$; $b = B$; $d = D$ u. s. f. (§. 45. VI. Zus.); da nun $a = b = d$ u. s. f., so sind auch alle Winkel A, B, D u. s. w. einander gleich, folglich ist das das Vieleck regulär.

10. Aus C fälle man auf die Seiten BD, DE u. s. f. die Lothe CI, CK u. s. f.; so ist $BC = BC$; $BI = BH$ (§. 39. II. Zus.), mithin $\triangle BCI \cong \triangle BCH$ (§. 38. IX. Zus.) und $CI = CH$.

11. Eben so folgt, daß $CK = CI = CH$, mithin daß diese Lothe Radien des Kreises, folglich die Seiten des Vieleckes Tangenten sind (§. 75.), also das reguläre Vieleck um den Kreis beschrieben ist.

§. 122.

Lehrsatz:

Wenn man in einer regulären Figur zwey Winkel A, B, die an einer Seite anliegen, durch gerade Linien halbiret, so durchschneiden sich letztere inner der Figur in einem Puncte C, welcher I. von allen Ecken, so wie II. von allen Seiten gleich weit abstehe.

Beweis:

1. Da A sowohl, als B kleiner als 2 R sind; so ist $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B < 2R$, und AC, BC stossen auf dieser Seite in C zusammen (§. 44.).

2. $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$ (per hyp.) mithin $BC = AC$ (§. 27.)

3. $AB = BD$ (per hyp.) $BC = BC$; $\frac{1}{2}B = \frac{1}{2}B$, also $\triangle ACB \cong \triangle BCD$ (§. 24.), und

4. $CD = AC = BC$ (Nr. 2.).

5. Auf ähnliche Art läßt es sich für die übrigen Ecke darthun, daß CE, CF u. s. w. jede CA gleich sey, mithin C von allen Ecken gleichweit abstehe.

6. Man ziehe aus C auf alle Seiten Perpendikeln, so ist $BH = BI = \frac{1}{2}AB$ (§. 39. II. Zus.), $BC = BC$, $\frac{1}{2}B = \frac{1}{2}B$, mithin $\triangle BCH \cong \triangle BCI$, und $CI = CH$; eben so folgt, daß $CK = CI = CH$ u. s. w., mithin, daß alle Perpendikeln, oder Entfernungen der Seiten von C einander gleich sind.

§. 123.

Aufgabe:

I. Um, und II. in jede reguläre Figur einen Kreis zu beschreiben (Fig. 91.)

Auflösung von I:

1. Man halbire zwey an einer Seite anliegende Winkel A, B durch gerade Linien.

2. Aus dem Puncte C, wo sich diese Linien durchschneiden, beschreibe man mit AC einen Kreis, so

geht

geht solcher durch alle Ecke des Vieleckes (§. 122. Nr. I), mithin ist der Kreis um das Vieleck beschrieben.

Auflösung von II.

Man ziehe aus C auf eine Seite AB ein Loth CH, und beschreibe mit diesem Halbmesser aus C einen Kreis, welcher in das Vieleck beschrieben ist; denn zieht man aus C auf alle übrigen Seiten Perpendikeln, so sind sie dem Radius CH gleich (§. 122. Nr. II.), mithin stehen die Seiten auf den Endespuncten der Radien senkrecht, sind also Tangenten (§. 75.), folglich ist der Kreis in das Vieleck beschrieben.

I. Zusatz: Wenn in, oder um den Kreis ein reguläres Vieleck beschrieben ist, so halbiret der Radius des Kreises jeden Poligonswinkel A oder a (Fig. 86.); denn eine Linie, welche den Winkel A halbirt, geht durch C (§. 122.), zwischen A und C giebt es aber nur eine Linie (§. 6.).

II. Zusatz: Wenn man in einem Vielecke aus dem Mittelpunct an alle Ecke gerade Linien zieht, so erhält man eben so viele congruente Dreyecke; denn da AC = BC = CD; AB = BD, so ist (§. 28.) $\triangle ACB \cong \triangle BCD$, und so auch bey allen übrigen.

III. Zusatz: Der Centriwinkel ACB eines regulären Vieleckes von n Seiten ist $= \frac{360°}{n}$. Denn alle Winkel am C halten zusammen 360° (§. 14. III. Zus.); nun

nun giebt es n ſolche einander gleiche Winkel (II. Zuſ.), folglich iſt einer davon $ACB = \frac{360°}{n}$.

IV. Zuſatz: Im regulären Fünfecke iſt der Centriwinkel 72°, im Sechsecke 60°, im Siebenecke beynahe 51° 25′ 43″.

V. Zuſatz: Man findet den Polygonswinkel, wenn man den Centriwinkel von 180° abzieht (§. 56. I. Zuſ.).

§. 124.

Lehrſatz:

In gleichnamigen regulären Figuren verhalten ſich die Perimeter wie die Halbmeſſer, oder Durchmeſſer jener Kreiſe, welche um ſie beſchrieben ſind.

Beweis: (Fig. 91.)

1. Gleichnamige reguläre Figuren ſind einander ähnlich (§. 91. III. Zuſ.); mithin

2. PERIM : perim. = AB : ab (§. 160.);

3. AB : ab = AC : ac, weil △ ACB ∽ △ acb (§. 93.)

alſo PERIM : perim. = AC : ac = 2 AC : 2 ac,

oder allgemein: PERIM : perim. = R : r = D : d.

wo R, r die Halbmeſſer, und D, d die Durchmeſſer der Kreiſe ausdrücken.

§. 125.

Lehrſatz:

Im Kreiſe kömt die Sehne ihrem Bogen um ſo näher, je kleiner ſie iſt (Fig. 92.)

Be-

Beweis:

1. Man bezeichne die Sehne AB mit c, ihren Bogen AFB mit a; so ist $a > c$ (§. 6. b.), man setze also

2. $a = c + \beta$.

3. Die Sehne AF vom halben Bogen bezeichne man mit γ, so ist wieder $\frac{1}{2}a > \gamma$, und $a > 2\gamma$; man setze also wieder

4. $a = 2\gamma + q$; so wird

5. $c + \beta = 2\gamma + q$.

6. Nun ist AF > AE (§. 34. III. Zus.), das ist, $\gamma > \frac{1}{2}c$, also auch $2\gamma > c$, das ist:

7. $c + \beta = 2\gamma + q$
   $c < 2\gamma$

$\beta < q$; das ist, die beyden Sehnen des halben Bogens sind zusammen weniger vom ganzen Bogen unterschieden, als die ganze Sehne, mithin nähert sich die Sehne ihrem Bogen um so mehr, je kleiner sie ist.

I. Zusatz: Der Perimeter eines in dem Kreise beschriebenen regulären Vieleckes ist kleiner, als die Peripherie des Kreises; denn alle Seiten, das ist, die Sehnen sind zusammen kleiner, als die Summe aller Bögen oder die Peripherie.

II. Zusatz: Der Perimeter eines in den Kreis beschriebenen Vieleckes kömt der Peripherie des Kreises um

so

so näher, je mehrere Seiten das Vieleck hat; denn da die Seiten desto kleiner werden, je mehrere Seiten das reguläre Vieleck bekömt, so nähern sie sich ihren Bögen, mithin der Perimeter der Kreislinie.

§. 126.

Lehrsatz:

Unendlich kleine Sehnen sind ihren Bögen gleich.

Beweis:

1. Man nehme einen Bogen AFB (Fig. 92.), welcher kleiner als die halbe Kreislinie ist, so ist auch die Sehne AB kleiner als der Diameter.

2. Nun sey der Diameter DF auf die Sehne AB senkrecht, so ist $\frac{1}{2}AB = AE < DC$, mithin um so mehr

3. $AE < DE$;

4. $FE : AE = AE : ED$ (§. 101.), also
$FE < AE$ (§. 210. II. Zus. Arith.)

5. Nun kann man den Punct E so nahe an F setzen, als man will, mithin AE immer kleiner, und selbst o setzen, folglich kann FE in Rücksicht AE selbst immer kleiner, und selbst Null werden.

6. Wenn sich aber der Bogen AFD nur unendlich wenig von der Sehne AB entfernt (EF ist dessen gröſste Entfernung), so ist solcher auch von der Sehne unendlich wenig, das ist, um keine angebliche Gröſse mehr verschieden;

7.

17. Da nun die Entfernung bey Verkleinerung der Sehne immer abnimmt, und bey unendlich kleinen Sehnen unendlich klein wird, so sind unendlich kleine Sehnen von ihren Bögen unendlich wenig unterschieden; man sagt daher,

8. die unendlich kleine Sehne verliert sich in ihren Bogen, oder ist solchen gleich.

I. Zusatz: Die Kreislinie gleicht dem Perimeter eines in den Kreis eingeschriebenen regulären unendlichen Vieleckes; denn so wie jede Seite, als unendlich kleine Sehne von ihrem Bogen unendlich wenig, so ist der Perimeter, als Inbegriff aller Sehnen, von der Peripherie als Inbegriff aller Bögen unendlich wenig unterschieden.

II. Zusatz: Der Kreis selbst ist einem regulären Vieleck von unendlich vielen Seiten gleich; denn so wie der Perimeter zur Kreislinie, so wird die Fläche des Vieleckes zur Kreisfläche.

III. Zusatz: Alle Kreise sind einander ähnlich (§. 91. III. Zus.)

IV. Zusatz: In zwey Kreisen verhalten sich die Peripherien wie ihre Radien oder Durchmesser, das ist

$$P : p = R : r = D : d \quad (\S. 124.)$$

V. Zusatz: Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie ist für alle Kreise einerley; denn

$P : p = D : d$; mithin $P : D = p : d$, oder $D : P = p : d$.

§. 88.

§. 127.

Lehrsatz:

Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie ist im Kreise beynahe $= 1 : 3{,}1415$.

Beweis:

1. Man setze den Halbmesser $= 1$, so ist der Perimeter eines in dem Kreise beschriebenen Sechseckes $= 6$, so wie eine Seite desselben $= 1$ (§. 120.).

2. Nun suche man die Seite des regulären Zwölfeckes (§. 129. II. Zus.), so ist solche (§. 108.) $= 0{,}517638\ldots$ und ihr Perimeter $= 6{,}211656$.

3. Auf ähnliche Art bekömt man den Perimeter des in den Kreis beschriebenen Vierundzwanzigeckes, des 48 Eckes u. s. f.

4. Setzet man dieses Verfahren immer fort, so findet man den Perimeter des in dem Kreise beschriebenen 768 Eckes $= 6{,}2830$.

5. Nun ist so ein Vieleck vom Kreise sehr wenig unterschieden, mithin ist für jeden Kreis (§. 126. V. Zus.) beynahe

6. $d : p = 2 : 6{,}2830$, oder $= 1 : 3{,}1415\ldots = 1 : \pi$.

Anmerkung: Archimedes und nach ihm Ludolph von Ceulen, von Hildesheim gebürtig und Prof. der Mathematik in Leiden, nahmen an, daß die Kreislinie gröſſer als der Perimeter eines in den Kreis, und kleiner als der Perimeter eines um den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes sey; nun suchten sie

die

die Perimeter zweyer solcher Vielecke von sehr vielen Seiten, so daß diese Perimeter selbst sehr von einander unterschieden waren, und nahmen die arithmetische Mittelzahl für die Größe der Kreislinie. Archimed fand auf diesem mühsamen Wege das Verhältniß 7:22 und 71:223, das erstere giebt die Kreislinie etwas zu groß, und das letztere etwas zu klein an. Ludolph fand das Verhältniß 1:3,14159265358979323846264338327950288, von dieser Zahl, welche in der Folge immer mit π bezeichnet wird, braucht man in der Anwendung mehr oder weniger Ziffern, je nachdem mehr oder weniger Schärfe erfodert wird. Das Verhältniß des Adrian Metius, von Alcmar in Holland gebürtig, und Prof. zu Franecker, 113:355 giebt die Kreislinien bis auf die siebente Decimalstelle richtig, ist aber in der Anwendung nicht so bequem als das ludolphische.

§. 128.

Aufgabe.

Aus dem Diameter d die Kreislinie p suchen.

Auflösung:

$d : p = 1 : \pi$ (§. 127.) und $p = d\pi = 3,1\pi$.

Beyspiel

für $d = 8'$, ist $p = 3,14 \times 8 = 25,12' = 25'1''2''$ (§. 80.).

Zusatz:

Zusatz: $d = \frac{p}{\pi}$, das ist, man findet den Diameter, wenn man die in Zahlen bestimmte Peripherie durch π dividirt.

§. 129.

Aufgabe:

Aus dem Durchmesser d, und der Anzahl n der Grade eines Bogens, die Länge a desselben zu bestimmen.

Auflösung:

$n^0 : 360^0 = a : p = a : d\pi$ (§. 128.)

mithin $a = \frac{n d \pi}{360}$.

Beyspiel:

Für $d = 8'$; $n = 50^0$; ist $a = \frac{50 \times 8 \times 3{,}14}{360} = 3{,}49$ beynahe.

I. Zusatz: $n = \frac{a.360^0}{p} = \frac{a.360}{d\pi}$; woraus sich die Anzahl der Grade eines Bogens bestimmen läßt, wenn seine Länge, und jene des Diameters, oder der Peripherie gegeben sind.

II. Zusatz: Hält der gegebene Bogen Minuten, oder Secunden, oder Grade, Minuten und Secunden, z. B. $a = 5^0\,3'\,24''$, so muß man ihn sowohl, als 360^0 auf Secunden reduciren (§. 257. Arith.), nemlich $n = 18204''$, und $360^0 = 1296000''$.

II. Theil.

Die Planimetrie.

I. Hauptstück.

Von der Gleichheit und Verwandlung der Figuren.

§. 130.

Lehrsatz:

Wenn man im Parallelogramme (Fig. 93 u. 94.) die Diagonal AC, und durch einen beliebigen Punct E derselben die Linie FG zu AB, und HI zu BC parallel zieht, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen BE, ED, wo die Diagonal nicht durchgeht, einander gleich sind.

Beweis:

1. Weil FG ∥ AB und HI ∥ BC (per hyp.), so ist FG ∥ DC und HI ∥ DA (§45. III. Zus.)

Folglich sind BE, GH, DE, FI Parallelogramme (§. 51.).

2.

2. $\left.\begin{array}{l}\triangle EHC = \triangle EGC \\ \triangle AFE = \triangle AIE\end{array}\right\}$ (§. 51. V. Zuſ.), alſo

$\triangle EHC + \triangle AFE = \triangle EGC + \triangle AIE$.

3. Ferner iſt $\triangle ADC = \triangle ABC$ (§. 51. V. Zuſ.), mithin

4. $\triangle ADC - (\triangle EHC + \triangle AFE) = \triangle ABC - (\triangle EGC + \triangle AIE)$, das iſt, Parallelogramm $DE = BE$.

I. Zuſatz: Wenn das gegebene Parallelogramm BD (Fig. 93.) eine Raute iſt, ſo ſind GH, und FI ebenfalls Rauten, erſtere mit der Seite BI, letztere aus AI; denn $x = n$ (§. 25.) $= o$ (§. 45. Nr. II.), mithin $FE = FA$ (§. 27.) $= AI$ (§. 45. IV. Zuſ.); folglich FI eine Raute (§. 53.), deren Seiten $= AI$ ſind. Eben ſo iſt $y = m = r$; alſo $CG = GE = BI$, mithin GH eine Raute, deren Seiten $= BI$ ſind.

II. Zuſatz: Wenn BD eine Raute iſt, ſo ſind BE, DE Rhomboiden aus den Seiten AI und IB; denn $BG = AF$ (§. 45. IV. Zuſ.) $= AI$ (I. Zuſ.), mithin ſind AI und IB die Seiten von BE; eben ſo iſt $DH = AI$, und $DF = CG = EG = IB$, folglich ſind AI und IB auch die Seiten von DE.

III. Zuſatz: Wenn der Winkel $A = 90°$, ſo wird die Raute BD zum Quadrate (Fig. 94.), folglich iſt GH das Quadrat des Stückes BI, und FI vom Stücke AI, der Grundlinie AB (I. Zuſ.), BE hingegen und DE ſind Rechtecke aus eben dieſen beyden Theilen der Grundlinie (II. Zuſ.).

IV. Zuſatz: Wenn man aus AB = AI + IB ein Quadrat verzeichnet, ſo beſteht ſolches aus den Quadraten von AI und IB, und aus zwey Rechtecken, von welchen AI und IB ebenfalls die Seiten ſind (III. Zuſ.).

§. 131.

Erklärung:

Eine Figur in eine andere, z. B. ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreyeck verwandeln, heißt, eine andere Figur verzeichnen, welche der gegebenen gleich iſt, mithin im gegebenen Beyſpiele ein Dreyeck verzeichnen, welches mit dem Parallelogramme einerley Größe hat, alſo ihm gleich iſt.

§. 132.

Aufgabe:

Das Parallelogramm BE (Fig. 93.) in ein anderes verwandeln, welches die gegebene Seite MN enthält.

Auflöſung:

1. Man verlängere eine Seite z. B. BG ſo, daß GC = MN wird.
2. Ziehe die gerade Linie CE, welche verlängert, die ebenfalls verlängerte Seite BI in einem Puncte A durchſchneiden wird (§. 45. II. Zuſ.).
3. Aus AB, BC, B verzeichne man das Parallelogramm BD (§. 52.).
4. Verlängere GE bis F, IE bis H, ſo iſt
5. DE das verlangte Parallelogramm.

Be-

Beweis.

DE ist wieder ein Parallelogramm, und = BE (§. 230.); ferner ist DF = CG (§. 45. IV. Zus.) = MN Nr. 1., folglich enthält das Parallelogramm DE die Seite MN, und ist dem gegebenen BE gleich.

Zusatz. Ist das gegebene Parallelogramm BE ein Rectangulum (Fig. 94.), so ist auch DE ein solches.

§. 133.

Erklärungen.

a. Parallelogramme liegen zwischen Parallelen, wenn (Fig. 95.) ihre Grundlinien AB, ab in der einen GH, und die gegenüberstehenden Seiten CE, ce in der andern Parallele MN liegen.

b. Dreyecke liegen zwischen Parallelen, wenn ihre Grundlinien AB, ab (Fig. 96.) in der einen GH, und ihre Spitzen C, c in der andern Parallele MN liegen.

I. Zusatz. Parallelogramme und Dreyecke zwischen einerley Parallelen GH, MN haben gleiche Höhen; denn CD, cd (Fig. 95.) die Höhen der Parallelogramme (§. 51. d.) sind gleich (§. 45. V. Zus.). Eben so sind (Fig. 96.) die Höhen CD, cd der beyden Dreyecke einander gleich.

II. Zusatz. Parallelogramme AE, ac (Fig. 95.), deren Grundlinien AB, ab in einer geraden Linie GH liegen, und gleiche Höhen haben, liegen zwischen Parallelen.

rallelen, das ist, CE, ce liegen in einer geraden Linie MN, welche zu GH parallel ist. Denn da CD, cd als Perpendikel auf GH parallel, und überdieß gleich sind, so ist die gerade Linie Cc ∥ Dd (§. 51. VII. Zus.), das ist, MN ∥ GH; nun sind aber auch CE, ce zu GH parallel, folglich müssen sie in der Linie MN liegen, sonst gäbe durch C, und c mit GH verschiedene Parallelen gegen (§. 45. I. Zus.).

III. Zusatz: Zwey Dreyecke, deren Grundlinien AB, ab (Fig. 96.) in der geraden Linie GH liegen, und gleiche Höhen CD, cd haben, stehen zwischen Parallelen, das ist, die durch die Spitze gezogene gerade Linie Cc oder MN ist mit GH parallel. Denn da wieder CD ∥ cd, so ist auch Cc ∥ Dd, mithin auch MN ∥ GH.

§. 134.

Lehrsatz:

Parallelogramme AD, AF (Fig. 97—99.) von einerley Grundlinie AB, wenn sie zwischen Parallelen liegen, sind gleich.

Beweis:

1. Die Seite EF vom Parallelogramme FA kann folgende drey Lagen haben:

I. Der Punct E kann auf D vom andern Parallelogramme AD fallen (Fig. 97.), oder

II. [illegible] (Fig. 98.) oder

III. zwischen C und D liegen (Fig. 99.).

2. Im ersten Falle (Fig. 97.) ist

$$\left.\begin{array}{rcl} CD = AB = DF & & \\ AC = BD & & \\ AD = BF & & \end{array}\right\} \text{(§. 51. IV. Zus.)}$$

also $\triangle ACD = \triangle BDF$ (§. 28.)

$\triangle ADB = \triangle ADB$

$\triangle ACD + \triangle ADB = \triangle ADB + \triangle BDF$

Folglich Parallelogr. $AD = AF$.

3. Im zweyten Falle (Fig. 98.) ist wieder

$CD = AB = EF$

$DE = DE$, also

$CD + DE = DE + EF$, das ist

$CE = DF$

$AC = BD$

$AE = BF$

also $\triangle ACE = \triangle BDF$

$\triangle DGE = \triangle DGE$

$\triangle AGB = \triangle AGB$; mithin

$\triangle ACE - \triangle DGE + \triangle AGB = \triangle BDF - \triangle DGE + \triangle AGB$

Folglich Parallelogr. $AD = AF$.

5. Im dritten Falle (Fig. 99.) ist ebenfalls

CD = AB = EF
ED = ED

also CD − ED = EF − ED, das ist

6. CE = DF
AC = BD
AE = BF

△ ACE = △ BDF

Trap. AD = Trap. AD, mithin

△ ACE + Trap. AD = △ BDF + Trap. AD,

folglich Parallelogr. AD = AF.

Zusatz: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich; denn man lege die Grundlinien aufeinander, so congruiren solche (§. 9. III. Zus.); nun haben beyde Parallelogramme einerley Grundlinie, und liegen zwischen Parallelen (§. 133. II. Zus.), folglich sind sie einander gleich (Lehrs.).

§. 135.

Aufgabe:

Ein Parallelogramm AD (Fig. 100.) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen.

Auflösung:

1. Man theile eine Seite AB in die verlangte Anzahl gleicher Theile (§. 87.)

2.

2. durch die Theilungspuncte E, G u. ſ. w. ziehe man mit der anliegenden Seite AC, oder BD die Paralleln EF, GH (§. 43.);

3. Da nun alle Parallelogramme AF, EH, GD gleiche Grundlinien (Nr. 1.) und gleiche Höhen (§. 33. I. Zuſ.) haben, ſo ſind ſie gleich (§. 134. Zuſ.)

§. 136.

Aufgabe:

Ein Parallelogramm AD (Fig. 98.) in ein anderes mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln.

Auflöſung:

1. Man verzeichne den Winkel BAE = a (§. 39.).

2. Verlängere die Seite CD, ſo wird ſolche

3. von dem Schenkel AE in einem Puncte E durchſchnitten (§. 45. II. Zuſ.).

4. Durch B ziehe man zu AE die Parallele BF (§. 43.).

5. AF wird das verlangte Parallelogramm ſeyn.

Beweis:

EF ∥ AB (Nr. 2.), AE ∥ BF (Nr. 4.), mithin iſt AF ein Parallelogramm (§. 51.), mit dem gegebenen Winkel a (Nr. 1.), und dem Parallelogramm AD gleich (§. 134.), alſo das verlangte.

Zuſatz: Iſt der gegebene Winkel a = 90°, ſo wird AF ein Rechteck; folglich läßt ſich jedes Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln.

§. 137.

Aufgabe:

Ein Parallelogramm in ein anderes mit einem gegebenen Winkel, und bestimmter Seite verwandeln.

Auflösung:

1. Man verwandle das gegebene Parallelogramm A in ein anderes B, welches die gegebene Seite enthält (§. 132.).

2. Dieses Parallelogramm B verwandle man wieder in ein anderes C, welches den gegebenen Winkel enthält (§. 136.).

Zusatz: Jedes Parallelogramm läßt sich in ein Rechteck von gegebener Seite verwandeln.

§. 138.

Lehrsatz:

Das Dreyeck ACB (Fig. 101.) ist die Hälfte eines Parallelogrammes, welches mit ihm gleiche Grundlinie, und Höhe hat.

Beweis:

1. Aus AB, AC, A verzeichne man das Parallelogramm AD (§. 52.), so hat dieses

2. mit dem Dreyecke einerley Grundlinie, und Höhe (§. 133. I. Zus.); ferner ist

3. $\triangle ACB = \frac{1}{2} AD$ (§. 51. V. Zus.).

4. Jedes Parallelogramm aber, welches mit AD; folglich auch mit dem Dreyecke ACB gleiche Grund-

linie

linie und Höhe hat, ist = AD (§. 134. Zuſ.), folglich iſt

5. das Dreyeck der Hälfte eines jeden ſolchen Parallelogrammes gleich.

I. Zuſatz: Dreyecke von gleichen Grundlinien und Höhen ſind gleich; denn Parallelogramme ſind es unter dieſen Beſtimmungen (§. 134. Zuſ.), folglich auch ihre Hälften die Dreyecke.

II. Zuſatz: Mehrere Dreyecke ACD, ADB, DBE von gleicher Höhe FG (Fig. 97.) ſind zuſammen einem Dreyecke gleich, welches die nemliche Höhe, und die Summe aller Grundlinien zur Baſis hat. Denn man nehme auf einer geraden Linie ab = CD (Fig. 103.), bd = AB, de = DF, und errichte durch a den Perpendikel ac = FG, ziehe endlich die Linien cb, cd, ce, ſo iſt ca die gemeinſchaftliche Höhe dieſer Dreyecke (§. 49. Zuſ.), und

$$\left.\begin{array}{l} \triangle acb = \triangle ACD \\ \triangle bcd = \triangle ADB \\ \triangle dce = \triangle DBF \end{array}\right\} \text{(I. Zuſ.), mithin}$$

$\triangle acb + \triangle bcd + \triangle dce = \triangle ACD + \triangle ADB + \triangle DBF$, folglich $\triangle ace = \triangle ACD + \triangle ADB + \triangle EDF$.

III. Zuſatz: Das Dreyeck ACB (Fig. 102.) iſt ſo groß, als ein Parallelogramm AE oder DF, welches die nemliche Höhe, aber nur die halbe Grundlinie des Dreyeckes zur Baſis hat. Denn

$\triangle ACB = \frac{1}{2} AF$ (Lehrſ.); iſt nun $AD = DB$, ſo iſt $AE = DF = \frac{1}{2} AF$ (§. 134. Zuſ.), mithin

$\triangle ACB = AE = DF$.

§. 139.

Aufgabe:

Ein Dreyeck BAC (Fig. 104.) in eine gegebene Anzahl gleicher Theile theilen.

Auflöſung:

1. Man theile eine Seite BC als Grundlinie in die gegebene Anzahl gleicher Theile (§. 87.).
2. Von der Spitze A ziehe man an alle Theilungspuncte gerade Linien AD, AE, AF, ſo ſind
3. Die Dreyecke einander gleich (§. 138. I. Zuſ.).

§. 140.

Aufgabe:

Ein Dreyeck ACB in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel a verwandeln (Fig. 102.).

Auflöſung:

1. Man halbire eine Seite AB als Grundlinie in D (§. 31.)
2. Verzeichne den Winkel BDG = a (§. 29.)
3. Durch C ziehe man mit AB die Parallele CH (§. 43.), ſo wird ſie vom Schenkel DG in G durchſchnitten (§. 45. II. Zuſ.)
4. Durch B ziehe man endlich BH mit DG parallel, ſo iſt

5.

5. DH das verlangte Parallelogramm.

Beweis:

DB ∥ GH (Nr. 3.), DG ∥ BH (Nr. 4.), also ist DH ein Parallelogramm (§. 15.) mit dem gegebenen Winkel a (Nr. 2.), welches zur Basis die Hälfte der Grundlinie vom Dreyecke (Nr. 1.) und die nemliche Höhe hat (§. 133. I. Zus.), mithin solchem gleich ist (§. 138. III. Zus.).

Zusatz: Ist der gegebene Winkel a = 90°, so wird DH ein Rechteck, folglich läßt sich jedes Dreyeck in ein Rechteck verwandeln.

§. 141.

Aufgabe:

Ein Dreyeck in ein Parallelogramm mit einem bestimmten Winkel und Seite verwandeln.

Auflösung:

1. Man verwandle das gegebene Dreyeck A in ein Parallelogramm B mit dem gegebenen Winkel (§. 140.)
2. Das Parallelogramm B verwandle man abermal in ein anderes C von der bestimmten Seite (§. 132.).
3. Da nun C = B = A ist, und den bestimmten Winkel sowohl, als die gegebene Seite enthält, so ist es das verlangte Parallelogramm.

Zusatz: Jedes Dreyeck läßt sich in ein Rechteck von einer bestimmten Seite verwandeln.

§. 142.

Aufgabe:

Eine geradlinigte Figur (Fig. 105. u. 106.) in mehrere Trapezen zu theilen.

Auflösung:

1. Man ziehe inner (Fig. 105.) oder außer (Fig. 106.) der Figur die unbestimmte gerade Linie $\alpha\beta$, und
2. Errichte auf solche von allen Ecken die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd, u. s. f. (§. 38.)
3. BCCB, CDDC u. s. f. sind lauter Trapezen.
4. Die Dreyecke BAB, und FGF kann man als Trapezen ansehen, von welchen die kleinere Parallele $=0$ ist.

§. 143.

Lehrsatz:

Wenn man im rechtwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 107.) über die Hypothenuse das Quadrat AD, und über die Catheten die Quadrate AG, BI verzeichnet, so ist das Quadrat der Hypothenuse der Summe der Quadrate beyder Catheten gleich, das ist

$$AC^q = AB^q + BC^q.$$

Beweis:

1. Aus B ziehe man auf die Hypothenuse den Perpendikel BL (§. 38.)
2. Verlängere solchen bis K (§. 45. II. Zus.), so ist LK mit AE und CD parallel (§. 42. Nr. I. u II.), mithin

3.

3. LE sowohl als DL sind Parallelogramme.

4. Nun ziehe man ferner BD, AI, so ist

5. $n = m = 90°$ (per hyp.)

$r = r$

also $n + r = m + r$

$\left.\begin{matrix} CD = AC \\ BC = CI \end{matrix}\right\}$ (§. 53. II. Zus.)

mithin $\triangle CBD = \triangle ACI$ (§. 24.).

6. $\left.\begin{matrix} \triangle CBD = \frac{1}{2} DL \\ \triangle CAI = \frac{1}{2} BC^q \end{matrix}\right\}$ (§. 138.), folglich

7. $\frac{1}{2} DL = \frac{1}{2} BC^q$, und $DL = BC^q$.

8. Zieht man noch die geraden Linien BE, CF, so läßt sich auf ähnliche Art beweisen, daß $LE = AB^q$, folglich

9. $LE + DL = AB^q + BC^q$, das ist

$AC^q = AB^q + BC^q$.

§. 144.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke das Quadrat einer Seite AC (Fig. 108.) den Quadraten der beyden andern Seiten AB, BC zusammen genommen gleich ist, so ist das Dreyeck rechtwinklicht, das ist,

wenn $AC^q = AB^q + BC^q$, so ist $y = 90°$.

Beweis:

1. Man errichte auf AB durch B den Perpendikel BD = BC (§. 48.), und ziehe AD, so ist

2. $AD^q = AB^q + BD^q$ (§. 143.), und $BD^q = BC^q$ (§. 53. III. Zus.), mithin

3. $AD^q = AB^q + BC^q = AC^q$; und AD = AC (§. 54. 1. Zus.), folglich

4. $\triangle ABD \cong \triangle ABC$ (§. 28.), und $y = x$;

5. Nun ist $x = 90°$ (Nr. 1.), folglich auch $y = 90°$

§. 145.

Aufgabe:

Mehrere Quadrate, deren Seiten a, b, c, d gegeben sind, in eines verwandeln.

Auflösung:

1. Man trage auf den Schenkeln eines rechten Winkels (Fig. 109.) die beyden Seiten a, b von zwey Quadraten auf, und ziehe die Hypothenuse A, so ist $A^q = a^q + b^q$ (§. 143.).

2. Am Endespunkt von A errichte man einen Perpendikel (§. 48.), und nehme solchen der Seite c des dritten Quadrates gleich, ziehe wieder die Hypothenuse B, so ist $B = A^q + c^q = a^q + b^q + c^q$.

3. Errichtet man abermal am Ende von B das Loth d, so ist $C^q = B^q + d^q = a^q + b^q + c^q + d^q$.

4. Verzeichnet man nun aus A, B, C u. s. f. Quadrate, so ist ersteres den beyden aus a und b zusammen gleich, das zweyte den dreyen aus a, b, c, und das dritte allen Vieren zusammen gleich.

Zusatz: Wenn $a = b$, mithin auch $a^q = b^q$, so ist $A^q = 2a^q$, folglich läßt sich ein Quadrat verdoppeln.

§. 146.

Lehrsatz:

Ein in den Kreis beschriebenes reguläres Vieleck (Fig. 91.) ist einem Dreyecke gleich, welches den Perimeter zur Grundlinie, und die Entfernung einer Seite vom Mittelpuncte zur Höhe hat.

Beweis:

1. Wenn man vom Mittelpuncte C an alle Ecke die Radien zieht, so wird das Vieleck in so viele congruente Dreyecke getheilet, als das Vieleck Seiten hat (§. 123. II. Zus.).

2. Nimmt man so eine Seite allemal als Grundlinie, so ist die Entfernung derselben vom Mittelpuncte die Höhe, und für alle Dreyecke gleich (§. 122. Nr. II.), folglich

3. sind alle diese Dreyecke zusammen, oder das ganze Vieleck einem Dreyecke gleich, welches die nem-

liche Höhe, und die Summe aller Seiten, oder den Perimeter zur Grundlinie hat (§. 138. II. Zuſ.)

Zuſatz: Der Kreis iſt einem Dreyecke gleich, welches den Radius zur Höhe, und die Peripherie zur Baſis hat (§. 126. II. Zuſ.).

II. Hauptstück.

Von Verhältnissen und Ausmessung der Figuren.

§. 147.

Lehrsatz:

Wenn die Seite ab (Fig. 116.) des Quadrates ab in der Seite AB des Rectangulums AC x mal und in der Seite AD n mal enthalten ist, und m, n ganze Zahlen sind, so ist das Quadrat im Rectangulo so vielmal enthalten, als die Zahl 1 im Producte m n, oder das Rectangulum ist m n mal größer, als das Quadrat.

Beweis:

1. Wenn ab in AB m mal enthalten ist, so läßt sich das Quadrat längst AB m mal nebeneinander legen, mithin ist Rectang. $A\beta = m.ac$.

2. Dieses Rectangulum $A\beta$ läßt sich so oft längst AD legen, als die Seite ab, oder ad des Quadrates in AD enthalten ist, folglich ist

3. Das Rectangulum $AC = n.A\beta = mn.ac$, oder auch $ac : AC = 1 : mn$.

Beyſpiel:

Wenn AB = 5.ab, AD = 3.ab, ſo iſt AC = 15 ac, oder ac: AC = 1: 15.

§. 148.

Erklärungen:

Um den Flächeninhalt einer Figur zu meſſen, nimmt man ein Quadrat, deſſen Seite entweder eine Ruthe, oder 1 Fuß, oder einen Zoll, oder eine Linie lang iſt (§. 80.), und daher Quadruthe, oder Quadratfuß, oder Quadratzoll u. ſ. w. heißt.

I. Zuſatz: Die Quadratruthe hält 100 Quadratfuß; denn da die Ruthe 10 Fuß lang iſt, ſo iſt (§. 147.) $m.n = 10$, mithin die Quadratruthe = 100 Quadratfuß.

II. Zuſatz: Ein Quadratfuß hält 100 Quadratzoll, ein Quadratzoll 100 Quadratlinien.

III. Zuſatz: Eine ebene Figur meſſen, oder ihren Flächeninhalt beſtimmen, heißt die Zahl angeben, wie oft das gebrauchte Maaß z. B. ein Quadratſchuh u. ſ. f. in ihr enthalten iſt.

IV. Zuſatz: Ein Rechteck wird gemeſſen, wenn man (Fig. 110.) die Seiten AB, AD mit einerley Längenmaaße ab z. B. einem Schuhe mißt, und die Zahlen multiplicirt (§. 147.).

V. Zuſatz: Mißt das gebrauchte Längenmaaß ab, oder die Seite des Quadrates ac die beyden Seiten AP,

AM

AM nicht ohne Rest, das ist, wenn zwar AB = m. ab, aber BP nicht mehr durch ab meßbar ist, und eben so AD = n.ab, wo ebenfalls DM als Rest bleibt, so ist m.n.ac = Rechteck AC, um den Streifen BCDMNP kleiner, als das auszumessende Rechteck AN, wo aber BP sowohl, als DM kleiner als ab sind: nun kann man aber das gebrauchte Maß oder ac, mithin auch dessen Seite ab so klein annehmen, als man will, z. B. war ab ein Fuß, so kann man Statt dessen einen Zoll, für diesen eine Linie u. s. w. annehmen; folglich kann man den überbleibenden Streifen, oder den Unterschied zwischen AC und AN so klein machen, als man will, mithin den Flächeninhalt eines Rechteckes so genau bestimmen, als man will.

VI. Zusatz: Drückt B die Zahl aus, wie vielmal das gebrauchte Maaß in der Grundlinie, und A die Zahl, wie vielmal eben dieses Maaß in der Höhe des Rechteckes enthalten ist, so giebt A.B den Flächeninhalt desselben an (III. Zus.). Dieses, und nichts mehr will ins künftige der in der Ausübung sehr bequeme Ausdruck sagen: **Das Product der Grundlinie und Höhe gebe den Inhalt des Rechteckes**, oder Rectang. = B.A.

VII. Zusatz: Wenn C die Größe der Seite eines Quadrates angiebt, so bestimmet C^2 dessen Flächeninhalt.

VIII. Zusatz: Setzet man die Länge von AB (Fig. 94.) = C, von AI = a, von IB = b; so ist der Flächeninhalt

Inhalt des Quadrates $BD = C^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (§. 130. IV. Zuſ. und §. 120. Arithm.).

§. 149.

Aufgabe:

Ein Rechteck in ein Quadrat verwandeln.

Auflöſung:

1. Man ſuche zwiſchen den Seiten B, A des Rechteckes die mittlere geometriſche Proportionallinie C (§. 102.)
2. Aus C verzeichne man ein Quadrat (§. 52. und §. 53. III. Zuſ.), welches das verlangte ſeyn wird.

Beweis:

Wenn a, b, c in Zahlen die durch einerley Maaß beſtimmte Größen von A, B, C ausdrücken, ſo iſt $c^2 = ab$ (Nr. 1.), ferner $c^2 = C^{\square}$, und ab = Rectang. (§. 148. VI. u. VII. Zuſ.); mithin auch das Rechteck dem gefundenen Quadrate gleich.

I. Zuſatz: Jede geradlinigte Figur läßt ſich quadriren, das iſt, in ein ihr gleiches Quadrat verwandeln; denn alle Figuren laſſen ſich in Dreyecke, und jedes Dreyeck in ein Rechteck (§. 140. Zuſ.), jedes Rechteck in ein Quadrat (Aufg.), und alle dieſe Quadrate in eines verwandeln (§. 145.).

II. Zuſatz: Der Kreis läßt ſich nicht quadriren; denn da man aus dem Diameter die Peripherie erſt finden

muß

muß (§. 127.), das Verhältniß des Diameters zur Peripherie aber nur durch Annäherung bestimmt ist, so läßt sich auch kein dem Kreise vollkommen gleiches Dreyeck (§. 146. Zus.), mithin auch kein ihm gleiches Quadrat construiren.

§. 150.

Aufgabe:

Ein schiefes Parallelogramm zu messen.

Auflösung:

Man messe die Grundlinie und Höhe mit einerley Maaße, und multiplicire diese Zahlen miteinander, so giebt das Product den Flächeninhalt, das ist:

Parallelogramm = B.A.

Beweis:

Wenn man Grundlinie und Höhe mit einerley Maaß mißt, so giebt das Product derselben, oder B.A den Inhalt eines Rechteckes von der nemlichen Grundlinie und Höhe (§. 148. VI. Zus.), dieses Rechteck ist aber dem schiefen Parallelogramm gleich (§. 134. Zus.),

I. Zusatz: Parallelogramme stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen (§. 219. II. Zus. Arithm.). Denn PARALLELOGR. = A.B; und ein anderes parallelogr. = b.a; mithin

PARALLELOGR : parallelogr. = B.A : b.a.

II. Zusatz: Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen, und bey gleichen Höhen wie ihre Grundlinien. Denn Pa-

PARALLELOGR. parallelogr. $= B.A : b.a$
$= A : a$ wenn $B = b$ } (§. 216.
$= B : b$ wenn $A = a$ ist } Arith.)

§. 151.

Aufgabe:

Ein Dreyeck zu messen.

Auflösung:

Man messe die Grundlinie und Höhe mit einerley Maaß, und theile das Product durch 2, oder

$$\Delta = \frac{B.A}{2} = \frac{B}{2}.A = B.\tfrac{1}{2}A.$$

Beweis:

BA giebt den Inhalt eines Parallelogrammes, welches mit dem Dreyecke gleiche Grundlinie B und Höhe A hat (§. 150.), nun ist das Dreyeck die Hälfte dieses Parallelogrammes (§. 138), folglich $\frac{B.A}{2}$ sein Flächeninhalt.

I. Zusatz: Man findet den Inhalt eines in den Kreis beschriebenen regulären Vieleckes, wenn man den Perimeter, und den Abstand einer Seite vom Mittelpuncte mit einerley Maaß mißt, und das Product dieser Zahlen durch 2 dividirt (§. 146.).

II. Zusatz: Der Flächeninhalt eines Kreises $C = p.\frac{1}{2}r$ (§. 146. Zus.) $= r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}$ (§. 128.)

III.

III. Zusatz: $d = \sqrt{\frac{4c}{\pi}}$.

IV. Zusatz: Sector = arc. $\frac{1}{2}$ r.

V. Zusatz: Segm. AEBA (Fig. 49.) = Sect. ACBEA — △ ACB.

VI. Zusatz: Der zwischen zwey Kreisen (Fig. 77.) enthaltene Ring, oder annulus $= R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$.

VII. Zusatz: Zwey Dreyecke stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen, und bey gleichen Grundlinien verhalten sie sich wie ihre Höhen, und bey gleichen Höhen wie ihre Grundlinien. Denn von Parallelogrammen gelten alle diese Verhältnisse (§. 150. I.u.II.Zus.), folglich auch von ihren Hälften den Dreyecken.

VIII. Zusatz: Im Dreyecke läßt sich aus dem bekannten Flächeninhalt und Grundlinie die Höhe bestimmen; denn $\triangle = B.\frac{1}{2}A$; mithin $A = \frac{2\triangle}{B}$.

§. 152.

Aufgabe:

Eine Trapez (Fig. 111.) zu messen.

Auflösung:

Man messe die beyden Parallelen und ihren Abstand, oder Höhe mit einerley Maaß, multiplicire die Summe der beyden ersten Zahlen mit der letzten, und dividire das Product durch 2, das ist

Trapez $= (B + b) \times \frac{1}{2}A$.

Be-

Beweis:

1. Man ziehe die Diagonal BD, so ist DE die gemeinschaftliche Höhe beyder Dreyecke ADB, und CBD (§. 133. I. Zus.).

2. Mißt man nun die Grundlinien AB, DC nebst der Höhe DE, und bezeichnen B, b, A ihre Größe in Zahlen, so ist

3. $\left.\begin{array}{l} \triangle ADB = B.\frac{1}{2}A \\ \triangle CBD = b.\frac{1}{2}A \end{array}\right\}$ (§. 151.)

also $\triangle ADB + \triangle CBD = B.\frac{1}{2}A + b.\frac{1}{2}A$,
das ist: Trapez. $AC = (B + b).\frac{1}{2}A$.

§. 153.

Aufgabe:

Eine jede geradlinigte Figur, wenn sie kein Dreyeck ist, zu messen.

I. Auflösung:

Man theile durch Diagonalen die Figur in Dreyecke, bestimme den Inhalt eines jeden einzelnen Dreyeckes (§. 151.), so giebt ihre Summe den Inhalt von der ganzen Figur.

II. Auflösung:

Man theile sie in Trapezen (§. 142.), und suche den Inhalt eines jeden einzelnen (§. 152.), so giebt ihre Summe den Flächeninhalt der ganzen Figur.

III. Auflösung: (Fig. 105 u. 106.).

1. Man theile die Figur in Trapezen (§. 142.).

2. Der Kürze wegen bezeichne man die gemessene Länge von BB mit B; von CC mit C; von DD mit D, das ist, die Länge jeder Parallele mit dem Buchstaben der Ecke, durch welche sie gezogen ist.

3. Eben so bezeichne man die mit eben dem Maaße bestimmte Länge der Höhe ab vom ersten Trapeze (oder Dreyecke) mit dem einzelnen Buchstaben b; die Länge ac mit c, ad mit d u. s. f.

4. Nun subtrahire man von der ersten Parallele die dritte, von der zweyten die vierte, von der dritten die fünfte u. s. w. so viel, als dergleichen Reste möglich sind; den ersten Rest multiplicire man in den Abstand der ersten und zweyten Parallele, den zweyten Rest in den Abstand der ersten und dritten Parallele u. s. f. Zur Summe aller dieser Producte addire man endlich das Product aus der Summe der beyden letztern Parallelen, in den Abstand der letzten von der ersten Parallele, und halbire alles; das ist:

Polyg. $= [(A-C)b+(B-D)c+(C-E)d+(D-F)e+(E-G)f+(F+G)g] : 2.$

Beweis:

5. Da alle gezogene Parallelen auf $\alpha\beta$ senkrecht stehen (§. 142.), so ist b die Höhe vom ersten Trapeze, oder wie in der Figur, weil $A = o$ ist, vom Dreyecke BA*B*; c—b ist die Höhe vom zweyten Trapez C*B*BC, d—c vom dritten u. s. f.; mithin

6.

6. $\triangle BAB = B.\frac{1}{2}b$ (§. 151.) $= (A+B)\frac{1}{2}b$ (§. 152.) wenn man dieſes Dreyeck für ein Trapez nimmt, deſſen kleinere Parallele A Null iſt.

7. Ferner Trap. $CBBC = (B+C) \times \frac{1}{2}(c-b)$ u. ſ. f. mithin

8. Polyg. $= [(A+B)b+(B+C)(c-b)+(C+D)(d-c)+(D+E)(e-d)+(E+F)(f-e)+(F+G)(g-f)] : 2$

$= [Ab+Bb+Bc+Cc-Bb-Cb+Cd+Dd-Cc-Dc+De+Ee-Dd-Ed+Ef+Ff-Ee-Fe+Fg+Gg-Ff-Gf] : 2$

$= [Ab-Cb+Bc-Dc+Cd-Ed+De-Fe+Ef-Gf+Fg+Gg] : 2$

$= [(A-C)b+(B-D)c+(C-E)d+(D-F)e+(E-G)f+(F+G)g] : 2$

Beyſpiel (Fig. 106.) ſey:

$a = 0$; $A = 0$;

$b = 47$; $B = 149$;

$c = 64$; $C = 174$;

$d = 107$; $D = 127$;

$e = 154$; $E = 198$;

$f = 182$; $F = 204$;

$g = 239$; $G = 0$; ſo iſt

(A—C) b

(A—C) b =	— 174 ×	47 =	+	—	8178
(B—D) c =	22 ×	64 =	1408	—	.....
(C—E) d =	— 24 ×	107 =	.....	—	2568
(D—F) e =	— 77 ×	154 =	.....	—	11858
(E—G) f =	198 ×	182 =	36036	—	.....
(F+G) g =	204 ×	239 =	48756	—	.....
		Summa	86200	—	22604

Folglich Polyg. = 63596 : a = 31798.

§. 154.

Aufgabe:

Ein Parallelogramm AC (Fig. 112.) in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile zu theilen, die aber ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben, z. B. in drey Theile, die sich wie 1, 3, 4 verhalten.

Auflösung:

1. Man theile eine Seite AB in die bestimmte Anzahl Theile, und nach dem verlangten Verhältnisse (§. 88.), nemlich Am : mn = 1 : 3; Am : nB = 1 : 4; und mn : nB = 3 : 4.

2. Durch die Theilungspuncte m, n ziehe man mit der anliegenden Seite AD die Parallelen mo, np, so sind

3. Ao, mp; nC die verlangten drey Theile.

Beweis:

Diese drey Parallelogramme haben gleiche Höhen (§. 133. I. Zus.),

mit-

mithin ist Ao : mp = Am : mn (§. 150. II. Zus.)
= 1 : 3 (Nr. 1.);
Eben so Ao : nC = Am : nB = 1 : 4;
Endlich mp : nC = mn : nB = 3 : 4.

§. 155.

Aufgabe:

Ein Dreyeck ACB (Fig. 113.) in eine beliebige Anzahl ungleicher Theile nach einem bestimmten Verhältnisse z. B. in drey Theile nach dem Verhältnisse 1, 3, 4 zu theilen.

Auflösung:

1. Man theile eine Seite AB als Grundlinie in die gegebene Anzahl Theile nach dem bestimmten Verhältnisse (§. 88.) so z. B. daß
Am : mn = 1 : 3; Am : nB = 1 : 4; mn : nB = 3 : 4.

2. Von der Spitze C ziehe man nach allen Theilungspunkten die geraden Linien Cm, Cn, so bekommt man

3. die verlangte Anzahl Theile und im bestimmten Verhältnisse.

Beweis:

Alle Dreyecke haben einerley Höhe (§. 49. Zus.); mithin
ist △ ACm : △ mCn = Am : mn (§. 151. VII. Zus.)
= 1 : 3 (Nr. 1.).
Eben so △ ACm : △ nCB = Am : nB = 1 : 4.
Endlich △ mCn : △ nCB = mn : nB = 3 : 4.

§. 156.

§. 156.

Aufgabe:

Eine jede geradlinigte Figur in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen (Fig. 114.).

Auflösung:

1. Man suche nach den vorhergehenden Auflösungen den Flächeninhalt der ganzen Figur, dividire solchen durch die gegebene Anzahl der Theile, so erhält man die Größe P eines jeden Theiles.

2. Nun suche man ebenfalls den Flächeninhalt des äußersten Dreyeckes FED in der Figur; so kann I. $\triangle FED = P$; II. $\triangle FED < P$; oder III. $\triangle FED > P$ seyn.

3. Im ersten Falle ist das Dreyeck ein verlangter Theil.

4. Im zweyten Falle ziehe man den Inhalt des Dreyeckes von P ab, nehme den Unterschied für den Inhalt eines Dreyeckes, dessen Grundlinie $= DF$, und suche die entsprechende Höhe desselben (§. 151. VIII. Zus.).

5. Auf FD errichte man einen Perpendikel, und nehme solchen von so einer Länge $= mn$, daß er der eben bestimmten Höhe (Nr. 4.) gleich ist.

6. Durch n ziehe man mit DF die Parallele po, und die gerade Linie Dp, oder Fo; so haben beyde Dreyecke DpF und DoF einerley Höhe mn (§. 133. I. Zus.), und ihr Flächeninhalt ist dem Nr. 4. bestimmten Unterschiede gleich, folglich ist

7.

7. $\triangle FED + \triangle DpF = \triangle FED + \triangle DoF = P$, alſo ein Theil beſtimmt.

8. Im dritten Falle endlich ziehe man P vom $\triangle FED$ ac, und beſtimme wie (Nr. 4—6.) die Dreyecke $DcF = DsF$ jedes dieſem gefundenen Unterſchiede gleich, ſo iſt wieder

9. $\triangle DBs = \triangle FEq = P$.

10. Auf ähnliche Art laſſen ſich die übrigen Theile beſtimmen.

§. 157.

Lehrſatz:

Eine geradlinichte Figur in eine gegebene Anzahl ungleicher Theile nach einem beſtimmten Verhältniſſe theilen.

Auflöſung:

1. Man ſuche den ganzen Flächeninhalt der Figur, und theile ſolche in die verlangte Anzahl Theile in dem beſtimmten Verhältniſſe (§. 115. Arithm.)

2. Die Conſtruction der gefundenen einzelnen Theile verrichte man nach (§. 156.)

§. 158.

Lehrſatz:

Aehnliche Dreyecke (Fig. 70 u. 71.) verhalten ſich wie die Quadrate homologer Seiten, oder Höhen, das iſt: $\triangle ABC : \triangle abc = AC^2 : ac^2 = BD^2 : bd^2$.

Beweis:

1. $\triangle ABC : \triangle abc = AC.BD : ac.bd$ (§. 251. VII. Zuſ.)
2. $AC : ac = BD : bd$ (§. 98.), alſo $BD = \frac{AC.bd}{ac}$.
3. $AC^2 : ac^2 = BD^2 : bd^2$ (§. 217. Arithm.)
4. $\triangle ABC : \triangle abc = AC.\frac{AC.bd}{ac} : ac.bd$ (Nr. 1. u. 2.)
   $= AC^2 : ac^2$ (§. 216. Arithm.)
   $= BD^2 : bd^2$ (Nr. 3.).

§. 159.

Lehrſatz:

Aehnliche geradlinigte Figuren (Fig. 45.) verhalten ſich wie die Quadrate homologer Seiten, oder Diagonalen, das iſt:

$ABCDEFGA : abcdefga = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$.

Beweis:

1. Man theile die Figuren durch ähnliche Diagonalen in Dreyecke, ſo ſind ſie der Ordnung nach einander ähnlich (§. 99.); mithin iſt
2. $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$ (§. 158.)
   $\triangle ACD : \triangle acd = AC^2 : ac^2 = AD^2 : ad^2 = AB^2 : ab^2$
   $\triangle ADE : \triangle ade = AD^2 : ad^2 = AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2$
   $\triangle AEF : \triangle aef = AE^2 : ae^2 = AF^2 : af^2 = AB^2 : ab^2$
   $\triangle AFG : \triangle afg = AF^2 : af^2 = AB^2 : ab^2$.

$\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AEF + \triangle AFG : \triangle abc + \triangle acd + \triangle ade + \triangle aef + \triangle afg = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$ (§. 214. II. Zuſ. Arithm.).

3. Folglich ABCDEFGA : abcdefga $= AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$.

§. 160.

Lehrsatz:

Zwey Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durch- oder Halbmesser, das ist:

$$C : c = D^2 : d^2 = R^2 : r^2.$$

Beweis:

$$C = \frac{D^2\pi}{4} = R^2\pi;\ c = \frac{d^2\pi}{4} = r^2\pi \text{ (§.151.II.Zus.);}$$

mithin $C : c = \frac{D^2\pi}{4} : \frac{d^2\pi}{4} = R^2\pi ; r^2\pi$

$= D^2 : d^2 = R^2 : r^2$ (§. 217. Arithm.)

III.

III. Hauptstück.

Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und verschiedener Ebenen gegen einander.

§. 161.

Grundsätze:

a. Eine gerade Linie, die einen Punct über, und einen unter einer Ebene hat, durchschneidet sie wenigst in einem Puncte.

b. Eine gerade Linie, von welcher zwey Puncte in einer Ebene sind, liegt ganz in selber.

c. Durch drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist die Lage einer Ebene bestimmt.

d) Zwey Ebenen, die zusammen stossen, haben verlängert mehrere Puncte gemein.

I. Zusatz: Eine gerade Linie kann eine Ebene nur in einem Puncte schneiden; denn hätte die gerade Linie mit der Ebene zwey Puncte gemein, so läge sie ganz in ihr (Grundsatz b.).

II. Zusatz: Zwey Ebenen AB, CD (Fig. 115.), wenn sie zusammen stossen, durchschneiden einander in einer geraden Linie CE; denn man nehme zwey Puncte

C, E, die beyden Ebenen gemein sind (Grundſ. d.), und ziehe die gerade Linie CE, ſo liegt ſie ſowohl in der Ebene AB, als CD (Grundſ. b.), und iſt alſo die Durchſchnittslinie der beyden Ebenen.

§. 162.

Erklärungen:

a. Eine gerade Linie AB (Fig. 116.) steht auf der Ebene *LM* senkrecht, wenn sie mit allen Linien BE, BD, BH u. s. f., die in der Ebene durch ihren Durchschnittspunct B möglich sind, rechte Winkel macht.

b. Die gerade Linie AG hingegen, die nicht senkrecht auf die Ebene LM steht, ist ist auf ihr schief.

c. Gerade Linien DE, FE (Fig. 125.), die wir immer verlängert die Ebene KL nie durchschneiden, sind ihr parallel.

1. Zusatz: Die gerade Linie FH (Fig. 115.) kann nicht auf zwey Ebenen AB, CD, die einander durchschneiden, zugleich senkrecht seyn; denn man ziehe von F in der Ebene CD nach einem beliebigen Puncte G der Durchschnittslinie CE die gerade Linie FG, und in der Ebene AB die gerade Linie HG, so steht FH auf der Ebene AB senkrecht (per hyp.); mithin FHG $=$ R (Erkl. a.), und alſo HFG $<$ R (§. 32. III. Zuſ.), folglich steht FH auf der andern Ebene CD nicht senkrecht.

II.

II. Zusatz: Eine gerade Linie kann durch einem Puncte nicht zugleich auf zwey Ebenen senkrecht seyn; denn da dieser Punct beyden Ebenen gemeinschaftlich ist, so stossen die Ebenen zusammen, und durchschneiden verlängert einander (§. 161. II. Zus.), folglich kann auf ihnen die gerade Linie nicht zugleich senkrecht seyn (I. Zus.).

§. 163.

Lehrsatz:

Wenn die gerade Linie AB (Fig. 116.) auf zwey geraden Linien BD, BE in der Ebene LM senkrecht steht, so ist sie auf der Ebene selbst senkrecht.

Beweis:

1. Man verlängere die Linien BD, BE, und nehme auf ihnen BD = BC; BF = BE.

2. Durch den Scheittel B eines der vier Winkel ziehe man eine beliebige gerade Linie z. B. BG zwischen den Schenkeln BF, BD, so wird solche von der geraden Linie DF in G, und ihre Verlängerung durch CE in H durchschnitten, wodurch mehrere Dreyecke entstehen.

3. BD = BC, und BF = BE (Nr. 1.); DBF = CBE (§. 13. Zus.), also △ DBF ≅ △ CBE (§. 24.); mithin

4. BFG = BEH, DF = CE (§. 22. Zus.).

5. BF = BE (Nr. 1), BFG = BEH (Nr. 4.), FBG = EBH (§. 13. Zus.), also △ BFG ≅ △ EBH (§. 26.), und

6.

6. BG = BH, FG = EH.

7. Nun ziehe man aus A die geraden Linien AD, AG, AF, AC, AH, AE; so ist

8. BD = BC (Nr. 1.), AB = AB, ABD = R (per hyp.) = ABC (§. 12. I. Zus.); mithin △ ABD ≅ △ ABC, und

9. AD = AC.

10. Eben so ist BF = BE (Nr. 1.) AB = AB; ABE = R = ABF; mithin △ ABF ≅ △ ABE, und

11. AF = AE; ferner AD = AC (Nr. 9), DF = CE (Nr. 4.); folglich △ ADF ≅ △ ACE (§. 28.), und

12. AFG = AEH; ferner AF = AE (Nr. 11.), FG = EH (Nr. 6.), also △ AFG ≅ △ AEH, und

13. AG = AH; ferner BG = BH (Nr. 6.), AB = AB; mithin △ ABG ≅ △ ABH, folglich

14. der Winkel △ ABG = ABH = R (§. 11. c.), das ist: AB steht auf jeder Linie, die man durch B in der Ebene LM ziehen kann, senkrecht, folglich auf der Ebene selbst (§. 162. a.)

§. 164.

Lehrsatz:

Drey gerade Linien BH, BE, BD (Fig. 117.), die in einem Punct zusammen laufen, durch welche eine vierte AB auf ihnen senkrecht steht, liegen in einerley Ebene LM.

Beweis:

1. Durch B, D, E (§. 161. c.), oder durch die beyden Linien BD, BE lege man eine Ebene LM, so muß auch
2. BH in dieser Ebene liegen, denn wäre
3. BH nicht in ihr, sondern z. B. über derselben, so lege man
4. durch A, B, H die Ebene BC, welche LM in der geraden Linie Bh durchschneide; so ist
5. ABh = R (§. 162. a.) = ABH (per hyp.).
6. Nun liegen aber BH, und Bh in der Ebene BC (Nr. 4.), folglich
7. gäbe es durch B in der Ebene BC zwey Lothe auf AB, welches unmöglich ist (§. 37. Zus.).

§. 165.

Lehrsätze:

I. Wenn zwey gerade Linien AB, CD (Fig. 118.) auf der nemlichen Ebene LM senkrecht stehen, so sind sie parallel, und wenn
II. von zwey Parallelen die eine AB auf der Ebene LM senkrecht steht, so ist auch die andere CD auf ihr senkrecht.

Beweis von I.

1. Man ziehe die gerade Linie BD,
2. Durch D errichte man auf ihr in der Ebene LM den Perpendikel DG (§. 48.) = AB, deren Länge beliebig ist.

3.

3. Ziehe endlich die geraden Linien AD, AG, BG, so ist

4. BD = BD; ferner AB = DG, und BDG = R (Nr. 2.) = ABD (§. 162. a.), mithin △ ABD ≅ △ BDG, und

5. AD = BG; ferner DG = AB (Nr. 2.), AG = AG, also △ ABG ≅ △ ADG, und

6. der Winkel ADG = ABG = R (§. 162. a.); folglich steht

7. GD auf BD (Nr. 2.) auf AD (Nr. 6.), und auf CD senkrecht (§. 162. a.), mithin liegen

8. BD, AD, CD in einer Ebene (§. 164.), in welcher AB liegt (§. 161. b.), das ist:

9. AB, und CD sind in der nemlichen Ebene, und da ferner ABD = R = BCD (§. 162. a.), also ABD + BCD = 2 R, so ist AB ∦ CD (§. 42. I.).

Beweis von II.

10. Man construire die Figur wie vorher (Nr. 1—3.), so gelten auch die Schlüße (Nr. 4—7.), folglich steht

11. GD auf BD (Nr. 2.), auf AD (N. 6.), also auf der Ebene ADB (§. 163.) senkrecht; in dieser Ebene

12. liegt AB (§. 161. b.), mithin auch ihre Parallele CD (§. 40. a.), folglich ist auch GDC = R (§. 162.), und

13. ABD + BDC = 2R (§. 45. I.), und da ABD = R (§. 162.), so ist auch BDC = R, folglich steht

14. CD auf BD (Nr. 13.) auf DG (Nr. 12.), mithin auf der Ebene BDG oder LM senkrecht (§. 163.).

Zusatz: Wenn zwey gerade Linien AB, CD (Fig. 119.) mit einer dritten EF parallel sind, so sind sie es auch unter sich, wenn sie schon nicht alle drey in einer Ebene liegen. Denn man errichte in der Ebene, in welcher AB, EF sind, durch G auf EF den Perpendikel GH, und in der Ebene, in welcher CD, EF liegen, den Perpendikel GI, so steht FG auf der Ebene HGI senkrecht (§. 163.), mithin auch BH und DI (Lehrs. II.), und BH ∥ DI (Lehrs. I.), folglich auch AB ∥ CD.

§. 166.

Aufgabe:

Aus einem Puncte A (Fig. 120.) außer der Ebene BC auf sie ein Loth ziehen.

Auflösung:

1. Man ziehe in der Ebene BC eine beliebige gerade Linie DE,

2. auf sie fälle man aus A in der Ebene DAE einen Perpendikel AF (§. 38.);

3) durch F errichte man DE in der Ebene BC die senkrechte Linie FI (§. 38.); auf diese endlich fälle man

4. aus A in der Ebene FAI die senkrechte AI, so ist solche auf der Ebene BC senkrecht. Be-

Beweis:

5. Man ziehe in der Ebene BC mit DE durch I die Parallele KL (§. 43.).

6. DE steht auf AF (Nr. 2.), auf FI (Nr. 3.), mithin auch auf der Ebene AFI senkrecht (§. 163.) folglich auch ihre Parallele KL (§. 165. II.), also ist

7. AIL = R (§. 162. a.) = AIF (Nr. 4.), und AI steht auf IL und IF, mithin auf der Ebene FIL oder BC senkrecht (§. 163.).

I. Zusatz: Von einem Puncte A außer der Ebene BC giebt es auf sie nur ein Loth AI; denn AF sey eine andere Linie, und man ziehe FI, so ist AFI < R (§. 32. III. Zus.), mithin steht AF schief auf der Ebene.

II. Zusatz: Vom Puncte A ist die senkrechte Linie AI die kürzeste nach der Ebene BC, und daher ihre Entfernung; denn jede andere Linie AF ist größer als AI (§. 34. III. Zus.).

III. Zusatz: Wenn AI auf der Ebene BC, und AF auf der Linie DE senkrecht ist, so ist auch FI auf DE senkrecht. Denn sonst könnte man durch F einen Perpendikel Fy auf DE ziehen, ein Loth aus A auf diese Linie Fy würde zugleich auf der Ebene senkrecht seyn (Aufg.), und es gäbe aus A zwey Lothe AI und Ay gegen den (I. Zus.).

IV.

IV. Zusatz: Wenn AI auf der Ebene BC, und IF auf der Linie DE senkrecht ist, so ist auch AF auf DE senkrecht. Denn sonst könnte man aus A auf DE ein Loth Af, und durch f auf DE ein Loth fi ziehen, welches zu FI parallel seyn würde (§ 42. I.), ein Loth von A auf fi wäre also von AI unterschieden, und doch auf die Ebene BC senkrecht (Aufg.), welches unmöglich ist (I. Zus.).

§. 167.

Aufgabe:

Durch einen Punct Q in der Ebene BC auf ihr einen Perpendikel errichten.

Auflösung:

1. Man nehme außer der Ebene einen beliebigen Punct A, und fälle auf die Ebene das Loth AI (§. 166.).
2. In der Ebene AIQ ziehe man durch Q mit AI die Parallele QS, so ist letztere ebenfalls auf der Ebene BC senkrecht (§ 165. II.), also der verlangte Perpendikel.

Zusatz: Durch einen Punct Q giebt es auf die Ebene BC nur ein Loth; denn ein anderes z. B. Qs müßte ebenfalls parallel zu AI seyn (§. 165. I.), folglich gäbe es in der Ebene AIQ durch Q mehrere Parallelen zu AI, welches unmöglich ist (§. 45. I. Zus.).

§. 168.

§. 168.

Erklärung:

Wenn AF (Fig. 120.) auf der Ebene BC schief steht, und man fällt aus A auf die Ebene das Loth AI, und zieht die gerade Linie IF, so heißt AFI der **Neigungswinkel der schiefen Linie *AF* gegen die Ebene *BC*.**

§. 169.

Lehrsatz:

Wenn die Schenkel AB, ED (Fig. 121.), und eben so AC und EF parallel sind, so sind die Winkel gleich.

Beweis:

1. Man nehme AB = ED, AC = EF.
2. Ziehe die geraden Linien AE, BD, CF, BC, DF, so ist
3. BD ∥ AE, und CF ∥ AE (§. 51. VII. Zus.), mithin
4. BD ∥ CF (§. 19. Nr. 4. Arithm. und §. 165. Zus.), also wird
5. BC = DF (§. 51. VII. Zus.), AB = ED, AC = EF (Nr. 1.), mithin
6. △BAC ≅ △DEF, folglich der Winkel BAC = DEF.

1. Zusatz: Zwey Parallelen AB, CD (Fig. 122.) machen mit einer Ebene LM gleiche Neigungswinkel. Denn man fälle aus A und C auf die Ebene LM die

die Lothe AE, CF; so ist AB ∦ CD (per hyp.) AE ∦ CF (§. 165. I.); mithin BAE = DCF (Lehrs.), ferner AEB = R = CFD (ex constr.), folglich ABE = CDF (§. 47. I. Zus.), welches die Neigungswinkel der beyden Linien AB, CD gegen die Ebene LM sind (§. 168.).

II. Zusatz: Wenn man durch einen beliebigen Punct G (Fig. 115.) der Durchschnittslinie CE in der Ebene AB den Perpendikel GH, und in der Ebene CD die senkrechte GF zieht, so ist der Winkel FGH immer gleich groß, man mag den Punct G annehmen, wo man will; denn E sey ein anderer Punct, EK in der Ebene AB, und ED in der Ebene CD auf die Durchschnittslinie CE senkrecht, so ist GH ∦ EK, und GF ∦ ED (§. 42. I.), folglich FGH ∦ DEK (Lehrs.).

III. Zusatz: Durch den Winkel FGH ist die Neigung der Ebene CD gegen AB bestimmt, daher heißt er auch der **Neigungswinkel** der beyden Ebenen AB und CD.

IV. Zusatz: Wenn der Neigungswinkel FGH (Fig. 123.) ein rechter ist, so steht die Ebene CD auf der Ebene AB senkrecht; denn FGH + FGh = 2 R (§. 11. II. Zus.), wenn also FGH = R, so ist auch FGh = R, mithin neigt sich die Ebene CD auf keine Seite von AB mehr als auf die andere, und steht also auf ihr senkrecht.

§. 170.

Lehrsatz:

Wenn die gerade Linie FG (Fig. 123.) auf der Ebene AB senkrecht steht, so ist jede Ebene CD, die durch FG gelegt wird, auf der Ebene AB senkrecht.

Beweis:

1. Durch G errichte man auf die Durchschnittslinie EC in der Ebene AB den Perpendikel GH, so ist
2. FGH der Neugungswinkel der Ebenen CD und AB (§. 169. II. u. III. Zus.).
3. Nun ist FG auf der Ebene AB senkrecht (per hyp.), mithin FGH = R (§. 162. a.), folglich die Ebene CD auf AB senkrecht (§. 169. IV. Zus.).

I. Zusatz: Wenn man aus einem beliebigen Puncte F der Ebene CD, welche auf der Ebene AB senkrecht steht, den Perpendikel FG auf die Durchschnittslinie CE zieht, so steht solcher auf der Ebene AB senkrecht. Denn man ziehe in der Ebene AB auf die Durchschnittslinie CE durch G den Perpendikel GH, so ist FGH der Neigungswinkel (§. 169. II. und III. Zus.), mithin ein rechter (per hyp.), ferner FGC = R (per hyp.), also FG auf der Ebene AB senkrecht (§. 163.).

II. Zusatz: Wenn die Ebene CD auf der Ebene AB senkrecht steht, und aus einem beliebigen Puncte F in der ersten Ebene auf die andere ein Loth gefället wird, so liegt solches ganz in der Ebene CD, und

steht

steht auf der Durchschnittslinie CE senkrecht. Denn man ziehe aus F in der Ebene CD auf die Durchschnittslinie den Perpendikel FG, so ist solcher zugleich auf der Ebene AB senkrecht (I. Zus.), mithin mit obigem Lothe einerley, weil es aus F nur ein Loth auf die Ebene AB giebt (§. 166. I. Zus.).

III. Zusatz: Wenn die Ebene CD auf der Ebene AB senkrecht steht, und durch einen Punct G auf die Durchschnittslinie CE im Perpendikel GF in der ersten Ebene gezogen wird, so steht solcher auf der andern Ebene AB senkrecht. Denn man errichte durch G auf die Durchschnittslinie den Perpendikel GH in der Ebene AB, so ist FGH der Neigungswinkel, also ein rechter (per hyp.), und eben so ist FGC = R, mithin FG auf der Ebene AB senkrecht (§. 163.).

IV. Zusatz: Wenn die Ebene CD auf der Ebene AB senkrecht steht, und die gerade Linie GF durch einen Punct der Durchschnittslinie CE ebenfalls auf der Ebene AB senkrecht ist, so liegt diese Linie GF ganz in der Ebene CD, und ist auf der Durchschnittslinie senkrecht. Denn man errichte durch G in der Ebene CD auf die Durchschnittslinie einen Perpendikel, so ist solcher auf der Ebene senkrecht (III. Zus.), also mit obigem GF einerley, weil es durch G nur einen Perpendikel auf die Ebene AB giebt (§. 167. Zus.).

V. Zusatz: Die Durchschnittslinie CE (Fig. 115) zweyer Ebener AB, CD steht auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht. Denn CGF = R = CGH (§. 169.

II. Zuſ.), mithin ſteht CG oder CE auf der Ebene FGH ſenkrecht (§. 163.).

VI. Zuſatz: Wenn die Durchſchnittslinie CE zweyer Ebenen AB, CD auf einer dritten Ebene FGH ſenkrecht ſteht, ſo ſind beyde Ebenen auf dieſer dritten ſenkrecht. Denn die Durchſchnittslinie liegt in AB und CD, mithin iſt jede dieſer Ebenen auf der dritten ſenkrecht (Lehrſ.).

VII. Zuſatz; Zwey Ebenen, die einander ſchneiden, ſtehen auf der Ebene ihres Neigungswinkels ſenkrecht. Denn ihre Durchſchnittslinie ſteht auf der Ebene des Neigungswinkels ſenkrecht (V. Zuſ.), folglich die beyden Ebenen ſelbſt (VI. Zuſ.).

§. 171.

Lehrſatz:

Wenn zwey Ebenen ABC, ABD (Fig. 124.) auf einer dritten Ebene LM ſenkrecht ſtehen, ſo ſteht auch die Durchſchnittslinie AB der beyden erſten Ebenen auf der dritten ſenkrecht.

Beweis:

1. Aus einem beliebigen Puncte A der Durchſchnittslinie AB der beyden Ebenen ABC, ABD ziehe man in jeder einen Perpendikel auf ihre Durchſchnittslinien CB, DB mit der Ebene LM.

2. Jeder dieſer beyden Perpendikel iſt auf Ebene LM ſenkrecht (§. 170. I. Zuſ.), mithin ſind ſie

3.

3. nicht zwey verschiedene, sondern nur eine gerade Linie (§. 166. I. Zus.), welche,

4. da sie in beyden Ebenen ABC, und ABD zugleich liegt (Nr. 1.) keine andere, als die Durchschnittslinie AB, seyn kann.

I. Zusatz: Wenn die Durchschnittslinie AB der beyden Ebenen ABC, ABD auf einer dritten Ebene LM senkrecht steht, so ist der Winkel CBD, welchen ihre Durchschnittslinien mit LM machen, der Neigungswinkel den beyden Ebenen ABC und ABD. Denn AB steht auf LM senkrecht (per hyp.), mithin ABC = R = ABD (§. 162. a.), und da BC zugleich in der Ebene ABC, und BD in der Ebene ABD liegen, so ist CBD der Neigungswinkel (§. 169. II. u. III. Zus.).

II. Zusatz: Wenn eine Ebene LM auf zwey andern ABC, ABD, die einander in AB schneiden, zugleich senkrecht steht, so geben die Durchschnittslinien BC, BD der beyden Ebenen mit LM den Neigungswinkel eben dieser Ebenen, das ist, CBD ist der Neigungswinkel der Ebenen ABC, ABD. Denn AB steht auf LM senkrecht (Lehrs.), folglich ist CBD der Neigungswinkel der Ebenen ABC, und ABD (I. Zus.)

§. 172.

Erklärung:

Zwey Ebenen, die, wie immer verlängert, nie einander durchschneiden, heißen **Parallelebenen**.

II. Zuſ.), mithin ſteht CG oder CE auf der Ebene FGH ſenkrecht (§. 163.).

VI. Zuſatz: Wenn die Durchſchnittslinie CE zweyer Ebenen AB, CD auf einer dritten Ebene FGH ſenkrecht ſteht, ſo ſind beyde Ebenen auf dieſer dritten ſenkrecht. Denn die Durchſchnittslinie liegt in AB und CD, mithin iſt jede dieſer Ebenen auf der dritten ſenkrecht (Lehrſ.).

VII. Zuſatz; Zwey Ebenen, die einander ſchneiden, ſtehen auf der Ebene ihres Neigungswinkels ſenkrecht. Denn ihre Durchſchnittslinie ſteht auf der Ebene des Neigungswinkels ſenkrecht (V. Zuſ.), folglich die beyden Ebenen ſelbſt (VI. Zuſ.).

§. 171.

Lehrſatz:

Wenn zwey Ebenen ABC, ABD (Fig. 124.) auf einer dritten Ebene LM ſenkrecht ſtehen, ſo ſteht auch die Durchſchnittslinie AB der beyden erſten Ebenen auf der dritten ſenkrecht.

Beweis:

1. Aus einem beliebigen Puncte A der Durchſchnittslinie AB der beyden Ebenen ABC, ABD ziehe man in jeder einen Perpendikel auf ihre Durchſchnittslinien CB, DB mit der Ebene LM.

2. Jeder dieſer beyden Perpendikel iſt auf Ebene LM ſenkrecht (§. 170. I. Zuſ.), mithin ſind ſie

3. nicht zwey verschiedene, sondern nur eine gerade Linie (§. 166. I. Zus.), welche

4. da sie in beyden Ebenen ABC, und ABD zugleich liegt (Nr. 11) keine andere, als die Durchschnittslinie AB, seyn kann.

I. Zusatz: Wenn die Durchschnittslinie AB der beyden Ebenen ABC, ABD auf einer dritten Ebene LM senkrecht steht, so ist der Winkel CBD, welchen ihre Durchschnittslinien mit LM machen, der Neigungswinkel den beyden Ebenen ABC und ABD. Denn AB steht auf LM senkrecht (per hyp.), mithin ABC = R = ABD (§. 162. a.), und da BC zugleich in der Ebene ABC, und BD in der Ebene ABD liegen, so ist CBD der Neigungswinkel (§. 169. II. u. III. Zus.).

II. Zusatz: Wenn eine Ebene LM auf zwey andern ABC, ABD, die einander in AB schneiden, zugleich senkrecht steht, so geben die Durchschnittslinien BC, BD der beyden Ebenen mit LM den Neigungswinkel eben dieser Ebenen, das ist, CBD ist der Neigungswinkel der Ebenen ABC, ABD. Denn AB steht auf LM senkrecht (Lehrs.), folglich ist CBD der Neigungswinkel der Ebenen ABC, und ABD (I. Zus.)

§. 172.

Erklärung:

Zwey Ebenen, die, wie immer verlängert, nie einander durchschneiden, heißen **Parallelebenen**.

I. Zusatz: Wenn eine gerade Linie auf zwey Ebenen zugleich senkrecht ist, so sind die Ebenen parallel. Denn sie können einander nicht schneiden, weil die die gerade Linie sonst auf diese zwey Ebenen zugleich nicht senkrecht seyn könnte (§. 162. I. Zus.).

II. Zusatz: Die Durchschnittslinien AF, DM (Fig. 126.) zweyer Parallelebenen AC, DE mit einer dritten Ebene AB sind parallel. Denn die geraden Linien AF, DM (§. 161. II. Zus.) liegen als Durchschnittslinien beyde in der Ebene AB, und weil AF in der Ebene AC, DM in der Ebene DE liegt, so können sie nie zusammenstossen, weil sonst die Parallelebenen einander schneiden würden; folglich sind sie parallel (§. 40. a.).

III. Zusatz: Wenn eine gerade Linie EH (Fig. 125.), die eine Parallelebene MN in E schneidet, so schneidet sie auch verlängert die andere KL. Denn aus H und E fälle man auf die Ebene KL die Lothe EA, HC (§. 166.), so sind sie parallel (§. 165. I.), und liegen in der nemlichen Ebene EACF (§. 40.), mithin FE ∦ CA (II. Zus.); da nun EH die Parallele FE in E schneidet (per hyp.), so schneidet sie verlängert auch die andere CA (§. 45. II. Zus.), mithin auch die Ebene KL, in welcher sie liegt.

IV. Zusatz: Wenn eine Ebene EFH die eine MN von zwey Parallelebenen schneidet, so schneidet sie verlängert auch die andere KL. Denn die gerade Linie EH schneidet verlängert die andere Ebene KL (III Zus.)

Zuſ.). mithin ſchneidet auch die Ebene EFH, in welcher CH liegt, verlängert die Ebene KL.

V. Zuſatz: Zwey Parallelebenen MN, KL ſtehen in allen Puncten gleichweit von einander ab. Denn man fälle aus zwey beliebigen Puncten D, E der Ebene MN, auf KL die ſenkrechten Linien DB, EA, ſo iſt DB ∦ EA (§. 165. I.); mithin liegen beyde Linien in der Ebene DBAE, folglich DE ∦ BA (II. Zuſ.), und DB = EA (§. 45. IV. Zuſ.).

§. 173.

Lehrſatz:

Wenn eine gerade Linie EA auf der einen KL (Fig. 125.) von zwey Parallelebenen ſenkrecht iſt, ſo iſt ſie auch auf der andern MN ſenkrecht.

Beweis:

1. Durch A ziehe man in der Ebene KL zwey beliebige gerade Linien AB, AC, ſo iſt EAC = R = EAB (§. 162. a.).
2. Durch E, A, C, und E, A, B lege man Ebenen (§. 161. c.), ſo iſt EF ∦ AC, ED ∦ AB (§. 172. II. Zuſ.), mithin
3. $\left.\begin{matrix} EAC + AEF = 2R \\ EAB + AED = 2R \end{matrix}\right\}$ (§. 45. I.), alſo
4. AEF = R = AED (Nr. 1.), und AE ſteht
3. auf der Ebene MN ſenkrecht (§. 163.).

§. 174.

Aufgabe:

Durch einen Punct E (Fig. 125.) mit der Ebene KL eine Parallelebene zu legen.

Auflösung:

1. Aus E fälle man auf die Ebene KL das Loth EA (§. 166.);
2. durch A ziehe man in der Ebene KL zwey beliebige gerade Linien AB, AC, und
3. durch E in der Ebene EAC zu AC die Parallele EF, und in der Ebene EAB zu AB die Parallele ED (§. 43.);
4. durch D, E, F lege man die Ebene MN, so ist sie zu KL parallel, also die verlangte.

Beweis:

5) EA ist auf KL senkrecht (Nr. 1.), mithin CAE $=R=$ BAE (§. 162. a.).

6. $\left.\begin{matrix} CAE + FEA = 2R \\ BAE + DEA = 2R \end{matrix}\right\}$ (§. 45. I.), mithin

7. FEA $=R=$ DEA, und

8. AE steht auf der Ebene DEE, oder MN senkrecht (§. 163.), und zugleich auf KL (Nr. 1.), folglich ist

9) die Ebene MN durch E mit der Ebene KL parallel (§. 172. I. Zus.).

Zusatz:

Zusatz: Durch einen Punct E giebt mit der Ebene KL nur eine Parallelebene MN. Denn gäbe es noch eine andere, so müßte ein Loth durch E auf MN zugleich auf die andere Ebene senkrecht seyn (§. 173.), welches unmöglich ist (§. 162. II. Zus.).

§. 175.

Lehrsatz:

Die Neigungswinkel KGH, LHI (Fig. 126.), welche zwey Parallelebenen AC, DE auf einer Seite mit einer dritten Ebene AB machen, sind gleich.

Beweis:

1. AF ♯ DM (§. 172. II. Zus.).
2. Durch G errichte man auf die Durchschnittslinie AF in der Ebene AB den Perpendikel GI, so wird solche DM schneiden (§. 45. II. Zus.).
3. durch G errichte man ferner auf AF in der Ebene AC den Perpendikel GK, so ist
4. KGH der Neigungswinkel der Ebenen AB, AC (§. 169. II. u. III. Zus.), und
5. AG steht auf dessen Ebene KGI senkrecht (§. 170 V. Zus.);
6. ferner schneidet diese Ebene auch die andere Parallelebene DE (§. 172. IV. Zus.), mithin steht
7. DH auf eben dieser Ebene KGI senkrecht (§. 165. II.) also ist
8. LHI der Neigungswinkel der Ebenen AB und DE (§. 171. I. Zus.).

9.

9. Nun ist auch LH ∦ KG (§. 172. II. Zus.), folglich

10. LHI = KGH (§. 145. II.), welches die beyden Neigungswinkel der Ebenen AC, DE auf einer Seite von AB sind (Nr. 4. u. 8.).

§. 176.

Lehrsatz:

Wenn zwey Ebenen AC, DE eine dritte in parallelen Linien AF, DM (Fig. 126.) schneiden, und mit ihr nach einer Seite zu gleiche Neigungswinkel machen, so sind sie parallel.

Beweis:

1. Durch G errichte man auf AF in der Ebene AB den Perpendikel GI, welcher DM schneidet (§. 45. II. Zus.),

2. durch G ziehe man auch auf AF in der Ebene AC den Perpendikel GK, so ist

3. KGH der Neigungswinkel der Ebenen AB, AC (§. 169. II. u. III. Zus.), und

4. AG steht auf dessen Ebene senkrecht (§. 170. V. Zus.).

5. Eben diese Ebene stoßt in H mit DE zusammen, und schneidet sie also in der geraden Linie HL (§. 161. II. Zus.), und

6. DH steht auf ihr senkrecht (§. 165. II.), mithin ist

7. LHI der Neigungswinkel der Ebenen AB, DE (§. 171. I. Zus. = KGH (per hyp.), also

2.

8. LH ♯ KG, weil auch beyde Linien in der Neigungsebene durch KGI ſind (§. 42. II.).

9. Nun errichte man in dieſer Neigungsebene durch H auf HL den Perpendikel Ha, ſo iſt ſolcher auch auf KG ſenkrecht, weil GaH = aHL (§. 45. III.) = R iſt.

10. Nun iſt aber die Neigungsebene ſowohl auf die Ebene AC, als DE ſenkrecht (§. 170. VII. Zuſ.), folglich ſteht

11. Ha auf der Ebene AC, und DE ſenkrecht (§. 170. I. u. III. Zuſ.), und die Ebenen AC, DE ſind parallel (§. 172. I. Zuſ.).

IV.

IV. Hauptstück.

Practische Geometrie, oder Anwendung der Geometrie auf die Feldmeßkunst.

I. Abschnitt.

Vom Gegenstande der Feldmeßkunst.

§. 177.

Erklärungen:

a. Eine Fläche, auf welcher die Richtungen der Schwere senkrecht sind, heißt eine Horizontalfläche, und

b. jede in dieser Fläche gezogene Linie eine Horizontallinie.

Zusatz: Fäden, oder Haare, an welchen Stückgen Bley, oder andere schwere Körper frey herabhängen (man nennet sie Senkel oder Senkbley), stellen die Richtungen der Schwere anschaulich dar.

§. 178.

Lehrsätze:

a. Die Erde ist ein kugelförmiger Körper.

b. Die Richtungen der Schwere stehen auf der Fläche eines stillstehenden Wassers senkrecht, und

c. stossen verlängert im Mittelpuncte der Erde zusammen.

I. Zusatz: Die Fläche eines stillstehenden Wassers ist horizontal.

II. Zusatz: Die Wasser- oder Horizontalfläche ist keine Ebene, sondern ein Theil der krummen Oberfläche des kugelförmigen Erdkörpers.

III. Zusatz: Die Richtungen der Schwere sind nicht parallel.

§. 179.

Erklärung:

a. So wie kleine Bögen von Kreisen mit großen Halbmessern von der Richtung ihrer Sehnen oder Tangenten nur unmerklich abweichen (§. 110. u. 111. III. Zus.), so sind kleine Theile von der Oberfläche der Erde, deren Radius beynahe 860 deutsche Meilen beträgt, von einer Ebene sehr wenig unterschieden; man nimmt daher eine Wasserfläche, deren Umfang nicht über 12 bis 15 Quadratmeilen beträgt, als eine Ebene, so wie jede Ebene, auf welcher die Richtung der Schwere senkrecht ist, als eine **horizontale**, oder **wagrechte Ebene**, und jede Linie in so einer Ebene als eine **Horizontallinie** an.

b. Aus dem nemlichen Grunde lassen sich die Richtungen der Schwere, die nicht weit von einander ent-

entlegen, und nicht sehr lang sind, als parallel annehmen.

I. Zusatz: Eine Ebene, die durch die Richtung der Schwere gelegt ist, steht auf einer horizontalen Ebene senkrecht (§. 170.), und heißt daher eine Verticalebene.

II. Zusatz: Horizontalebenen sind parallel (§. 172. I. Zus.).

§. 180.

Erklärungen:

Man stelle sich zwischen den Gegenständen oder Puncten A, B, C, D, E auf dem Felde gerade Linien, mithin die Figur ABCDEA (Fig. 127.), ferner durch A eine Horizontalebene, und auf sie aus obigen Puncten die senkrechten Linien Bb, Cc, Dd, Ee vor, so heißen

a. Die Puncte, b, c, d, e die auf den Horizont reducirten Puncte, oder die Projectionen von B, C, D, E.

b. Die Lothe Bb, Cc, Dd, Ee sind die Höhen von B, C, D, E über die Horizontalebene durch A.

c. Die geraden Linien AB, BC, CD, DE, EA sind die wahren Entfernungen, und Ab, bc, cd, de, eA die auf den Horizont reducirten Entfernungen oder Weiten der Puncte A, B, C, D, E von einander.

d.

d. Die Figur AbcdeA heißt die auf den Horizont reducirte Figur von ABCDEA.

e. Verzeichnet man auf dem Papier eine der auf den Horizont reducirten AbcdeA ähnliche Figur $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$, so heißt sie der Grundriß, oder die topographische Karte von ersterer, und so eine Figur verzeichnen, heißt AbcdeA in Grund, oder Grundriß legen.

§. 181.

Erklärung:

Die Wissenschaft der horizontalen Weiten, Höhen, die auf den Horizont reducirten Flächen auf der Erde zu messen, und in Grundriß zu legen, heißt Geodäsie, oder Feldmeßkunst, und inwieferne die Auflösungen ihrer Aufgaben Anwendungen der Geometrie sind, practische Geometrie.

I. Anmerkung: Daß man nicht die wahren, sondern die auf den Horizont reducirten Weiten und Flächen mißt, und in Grundriß legt, läßt sich wohl kein anderer Grund angeben, als daß solches leichter ist, und den Absichten bey Vermessungen hinlänglich entspricht.

II. Anmerkung: Da sich Geodäsie immer auf die Voraussetzung stützet, daß Horizontalflächen Ebenen seyen (§. 179.), so können ihre Vermessungen nie ins Große gehen, und dadurch unterscheidet sie sich von der Geographie.

IV.

III. Anmerkung: Die trigonometrischen Auflösungen können erst nach der Trigonometrie vorgetragen werden.

II. Abschnitt.

Von Absteckung gerader Linien, und Winkel auf dem Felde, nebst Vermessung der erstern.

§. 182.

Erklärungen:

a. Um Linien auf dem Felde zu messen, braucht man als Maaß einen Fuß (§. 80.), und zwar in Baiern den sogenannten Münchner- oder baierischen Fuß, der sich zu dem ehemals königl. Pariser- = 1000: 1113 verhält.

b. Ein Fuß hält 10 Zoll, ein Zoll 10 Linien, eine Linie 10 Scrupel.

c. Die Länge von 10 Schuhen heißt eine geometrische Ruthe; 25406 baierische Schuhe machen eine dermalige baierische Chaussée-Meile aus.

I. Anmerkung: Die Verhältnisse der in verschiedenen Ländern üblichen Schuhe und Meilen habe ich im Anhange zur Arithmetik in einer Tabelle dargestellet, ihre Verwandlungen in einander müssen nach (§ 270. Arith.) vorgenommen werden.

II. Anmerkung: Im bürgerlichen Leben theilet man den Fuß in 12 Zolle, den Zoll in 12 Linien, die

Linie

Linie in 12 Scrupel, und 12 Schuhe machen eine Ruthe aus. Um nun eine im Decimalmaaße bestimmte Länge in das Duodecimalmaaß zu verwandeln, und so auch umgekehrt, reicht die gewöhnliche Regel de Tri zu (§. 269. Arithm.).

§. 183.

Erklärungen:

Die zum Messen gerader Linien auf dem Felde nöthigen Werkzeuge sind

a. Maßstäbe, das ist, Stäbe, oder Ebenen, auf welchen die in einem Lande üblichen Maaße, mithin in Baiern die Längen eines baierischen Fußes, Zolles, Linie, oder auch Ruthe verzeichnet sind.

b. Eine, oder ein Paar Meßketten von Eisen, oder Messingdrath 50 oder 100 Schuhe lang, so daß jedes Glied genau einen Fuß hält, und nach 10 Fuß immer gewisse Merkmaale angebracht sind.

c. Zeichenstäbe, ungefähr 8 Zolle lang, die man brauchet, um die Irrungen im Zählen zu vermeiden, und gewisse Puncte zu bezeichnen; man muß davon immer eine beträchtliche Anzahl an der Hand haben.

Anmerkung; Manchmal nimmt man statt der Meßkette eine hanfene Schnur, die aber ihrer Dehnbarkeit wegen zum Messen nicht viel brauchbar ist.

§. 186.

Erklärungen:

Um eine gerade Linie, oder vielmehr eine senkrechte Ebene auf dem Felde abzustecken, braucht man

a. Absteckstäbe, das ist, gerade 5 bis 6 Fuß lange, etwa einen Zoll dicke Stangen, die unten mit einer eisernen Spitze versehen sind.

b. Meßfahnen, ebenfalls gerade Stangen, die aber länger als die Absteckstäbe, und oben mit einer Fahne versehen sind.

c. Senkel (§. 177. Zus.), um die Stäbe senkrecht auf den Boden zu setzen.

§. 187.

Aufgabe:

Einen Stab EA (Fig. 125.) senkrecht auf den horizontalen Boden KI zu setzen.

Auflösung:

1. Man halte vor den Stab den Senkel FC, und gebe erstern so eine Richtung, daß er sich in der Ebene FCA befinde, welches sich durch das Visiren bewerkstelligen läßt.

2. Man halte den Senkel auf einer andern Seite DB, die aber der vorigen nicht gerade entgegen steht, ebenfalls vor den Stab, und bringe solchen in die Ebene DBA;

Anmerk. Um den Fehler etwa zu begegnen, diesen so klein als mögl. zu machen, muß man:
1. die Ruthe senkrecht als mögl. neben einander setzen.
2. näher an den Fäden weg als bei d. Spitze unten visiren.

3. Ist nun der Stab EA durch ähnliches wiederholtes Verfahren so auf dem wagrechten Boden KL befestiget, daß er sich zugleich in der Ebene FCA, und DBA befindet, so steht er auf dem Boden senkrecht.

Beweis:

Die Ebene FCA sowohl, als DBA steht auf dem Boden senkrecht (§. 179. Zus.), folglich auch ihre Durchschnittslinie, oder der Stab EA (§. 171.).

§. 188.

Aufgabe:

Zwischen zwey Puncten A, B (Fig. 128.), wo man von einem A zum andern B ungehindert sehen und gehen kann, auf dem Felde eine gerade Linie abzustecken und zu messen.

Auflösung:

1. Wenn in A und B nicht schon senkrechte Gegenstände vorhanden sind, so setze man die Stäbe EA, HB auf den horizontalen Boden senkrecht (§. 187.)

2. Diese beyden Stäbe liegen als Parallelen (§. 165.I.) in der nemlichen Ebene EABH, welche auf dem horizontalen Boden senkrecht steht (§. 170.).

3. Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit dem Boden, oder die horizontale Linie AB ist nun jene Linie, die man abstecken, das ist, von welcher man

durch ausgesteckte Stäbe mehrere Puncte zwischen A und B bestimmen will, um sie theilweise zu messen.

4. In einiger Entfernung von AE lasse man durch einen Gehilfen den Stab FC auf dem Boden senkrecht so setzen, daß, wenn man vor dem Stabe AE nach HB visirt, diese beyden Stäbe sowohl, als der dritte neue Stab FC einander decken.

5. FC liegt dadurch in der Ebene EABH, und C ist in der geraden Linie AB (§. 170. II. Zus.).

6. Setzet man auf ähnliche Art den Stab GD, so liegt auch solcher in der Ebene EABH, und D in der Linie AB.

7. Nun messe man mit der Kette vom ersten Stabe EA nach dem zweyten FC so, daß solche immer horizontal gespannt, keines ihrer Glieder verbogen oder überschlagen ist, oder die Linie ac, so ist ac = AC (§. 45. IV. Zus.),

8. Auf die nemliche Art bestimme man mit der Meßkette die Länge der horizontalen Linien cd = CD, db = DB, so giebt ihre Summe die Länge von AB.

Anmerkung: Wenn in der Folge von ausgesteckten Stäben die Rede ist, so müssen solche allemal auf den Horizont senkrecht stehen.

§. 189.

Aufgabe:

Durch einen gegebenen Punct C auf die Linie AB einen Perpendikel auf dem Felde errichten. I.

I. Auflösung: (Fig. 129.)

Man spanne längst der Linie AB eine Kette oder Schnur aus, und nehme auf ihr CM = CN von beliebiger Länge; aus M und N beschreibe man mit einer Latte, oder einem Stücke der Meßkette von einer Länge, die größer als die Hälfte von MN ist, Bögen, so erhält man einen Durchschnittspunct D, und CD ist der verlangte Perpendikel (§. 37.).

II. Auflösung:

Man spanne in der Richtung AB eine Schnur oder Meßkette (Fig. 130.); von einer andern Kette nehme man drey Abtheilungen ab, bc, ac von so einer Länge, daß $ac^2 = ab^2 + bc^2$ z. B. ac = 5′, ab = 4′, und b = 3′, und verbinde sie zu einem Dreyecke (§. 23.); so ist solches rechtwinklicht (§. 144. und §. 148. VII. Zus.). Man lege solches mit dem einen Perpendikel bc an AB durch C, so ist ab auf AB durch C senkrecht, und in dieser Richtung kann man in beliebiger Entfernung bey D ebenfalls einen Stab einsetzen, so wird auch CD perpendikulär seyn.

§. 190.

Aufgabe:

Auf dem Felde einen Winkel abzustecken, der einem andern gegebenen BAC (Fig. 17.) gleich ist.

Auflösung:

Man verfahre ganz nach der Anleitung des 29sten §, um die Kreisbögen auf dem Felde zu ziehen, dienen Latten, oder auch die Meßkette.

§. 191.

Aufgabe:

Auf dem Papier einen Winkel zu verzeichnen, welcher dem auf dem Felde abgesteckten MAN (Fig. 131.) gleich ist.

Auflösung:

1. Man nehme auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die beliebigen Puncte B, C;
2. Messe die Linien AB, AC, BC, und
3. verzeichne aus ihnen nach dem verjüngten Maaßstabe das Dreyeck bac, so ist
4. der Winkel bac = MAN.

Beweis:

Da die Seiten ab, ac, bc im verjüngten Maaße eben so groß genommen worden, als AB, AC, BC nach dem gewöhnlichen Maaße sind (Nr. 2. u. 3.); so sind die Seiten vom △ bac den Seiten vom △ BAC proportionirt, folglich △ bac ∽ △ BAC (§. 95.), und der Winkel bac = BAC = MAN.

§. 192.

Aufgabe:

Zu einer gegebenen Linie CD auf dem Felde einer Parallele AB zu ziehen.

I. Auflösung. (Fig. 32.)

Man errichte durch zwey beliebige Puncte F, H die Per-

Perpendikel FE = HG von beliebiger Länge, so ist EG ∥ FH (§. 51. VII. Zuſ.), folglich AB ∥ CD.

II. Auflöſung: (Fig. 133.)

Man ſetze in beliebiger Entfernung von CD einen Stab in E, und einen andern A in die Verlängerung von DE, wo man die Parallele ziehen will. Nun meſſe man DE, EA, CE, und ſuche die vierte Proportionallinie EB, trage ſie in der verlängerten CE auf, ſo iſt AB ∥ CD.

Beweis:

CED = AEB; DE : EA = CE : EB (per conſtr.); mithin △ CED ∽ △ AEB (§. 94.), alſo ADC = BAD (§. 91. II. Zuſ.), folglich AB ∥ CD (§. 42. III.).

§. 193.

Aufgabe:

Durch einen gegebenen Punct A mit CD auf dem Felde die Parallele AB zu ziehen (Fig. 133.).

Auflöſung:

Man ſetze zwiſchen A und D einen Stab in E, ſo daß A, E, D in einer geraden Linie liegen. Nun meſſe man DE, EA, CE; ſuche die vierte Proportionallinie EB, und ſtecke ſie in der Verlängerung CE ab, ſo iſt AB die verlangte Parallele. Denn △ CED ∽ △ AEB (§. 94.), alſo BAD = ADC, und AB ∥ CD.

§. 194.

§. 194.

Aufgabe:

Zwiſchen A und B (Fig. 134.) auf dem Felde eine gerade Linie, oder vielmehr eine Verticalebene abzuſtecken, wenn man von A nach B nicht ſehen kann, zwiſchen beyden aber ein Platz z. B. ein Hügel ſich befindet, von welchen man ſowohl A, als B deutlich ſieht.

Auflöſung:

1. Man ſetze auf den Hügel in D einen Stab, der dem Augenmaaße nach mit A, B in einer Ebene liegt.
2. Durch Gehilfen laſſe man einen Stab C in die ſenkrechte Ebene DA, und einen andern E in die Ebene DB ſetzen, und nun
3. den Gehilfen bey C aſſiren; findet dieſer, welches aber auf das erſtemal kaum zu erwarten iſt, daß
4. die Stäbe C, D, E einander decken, ſo wäre die verlangte Verticalebene ausgeſteckt. Denn zwey Stäbe liegen allemal als Parallelen in einer Ebene, und durch ſie iſt die Lage dieſer Ebene vollkommen beſtimmt (§. 191. c.). Da nun A, C, D in einer Ebene liegen (Nr. 2.), und der Stab E in der nemlichen Ebene mit C, D iſt, ſo liegt er auch mit A, C, D in einerley Ebene; und da wieder B mit den beyden Stäben D, E in einer Ebene iſt (Nr. 2.), ſo ſind endlich alle fünf Stäbe A, C, D, E, B in der nemlichen Verticalebene.

5.

5. Findet aber der Gehilf (Nr. 3.), daß die drey Stäbe C, D, E einander nicht decken, so ziehe man den Stab bey D aus, und bringe solchen nach d in die Ebene C, E.

6) Nun liegen aber die Stäbe A, C, d, und eben so B, E, d nicht mehr in einer Ebene, man lasse also die Stäbe C, E ausziehen, und ersterm nach c in die Ebene Ad, den andern nach e in die Ebene Bd setzen, und endlich den Gehilfen wie (Nr. 3.) visiren, wo dann wieder alles gilt, was (Nr. 4.) angeführt wurde.

7. Das Verfahren (Nr. 5. u. 6.) muß man so oft wiederholen, bis endlich die mittlern drey Stäbe γ, δ, ε so eine Lage haben, daß Aγδ, γδε, δεB; mithin allemal drey für sich genommen in einer Ebene liegen, so werden nach Nr. 4. alle fünf Stäbe in einer Verticalebene, und die Puncte AγδεB in einer geraden Linie liegen.

Anmerkung: Wenn zwischen A und B kein solcher Platz vorhanden ist, daß man A und B zugleich sehen konnte, so kömmt später die Auflösung vor, wie man zwischen A und B eine Vertikalfläche ausstecken könne.

III. Abschnitt.

Von Messung unzugänglicher Weiten mit bloßen Stäben.

§. 195.

Aufgabe:

Die unzugängliche Weite AB finden, wenn man zu beyden Objekten kommen kann.

I. Auflösung: Wenn man von A nach B ungehindert sehen kann, aber ein dazwischen liegender Morast, oder Teich, die unmittelbare Vermessung hindert (Fig. 135.).

1. Man stecke die Linie AB, so weit dieses angeht aus (§. 188.).

2. Bey a und b errichte man den Perpendikel aC = bD von so einer Länge, daß zwischen C und D kein Hinderniß im Messen vorkommt.

3. Nun messe man Aa, CD, bB, so giebt ihre Summe die gesuchte Weite AB.

Beweis:

Offenbar ist Aa + ab + bB = AB,
Ferner CD = ab (§. 51. VII. Zus.)
Folglich Aa + CD + bB = AB.

II. Auflösung: Wenn man von einem Puncte C des Standortes (Fig. 136.) ungehindert nach beyden Gegenständen sehen und messen kann.

1.

1. Man setze in C einen Stab, und messe die beyden Linien CA, CB.

2. Nun verlängere man die Seite AC bis D, so daß AC = CD wird, eben so trage man rückwärts BC = CE in einer geraden Linie auf, messe DE, welches die gesuchte Weite AB giebt, denn △ ACB ≅ △ DCE (§. 24.).

3. Hat man nicht Raum genug, um AC und BC abzustecken, so nehme man gleiche Theile von ihnen z. B. Cα = ¼ AC, Cβ = ¼ CB, so ist αβ = ¼ AB; denn △ αCβ ≅ △ ACB (§. 24.), also AC : αC = AB : αβ; ist nun αC = ¼ AB, so ist auch αβ = ¼ AB.

4. Das nemliche gilt, wenn man vorwärts gleiche Theile z. B. aC = ¼ AC, und bC = ¼ BC nimmt, so ist ebenfalls ab = ¼ AB.

III. Auflösung: Wenn sich zwischen den Gegenständen A, B ein Fluß (Fig. 137. 2.) in einiger Entfernung aber eine Brücke M befindet.

1. Man errichte bey A und B die Perpendikel Aa, Bb (§. 189.), und

2. nehme solche von so einer Länge, daß man von a ungehindert in gerader Linie über die Brücke nach b messen kann.

3. Nun messe man die Linien Aa, Bb, ab.

4. Von b stelle man sich einen Perpendikel bα auf Aa vor, so ist bA ein Parallelogramm (§. 51. a.) also

5.

II. Zusatz. Wenn bey D nicht hinlänglicher Raum vorhanden ist (Fig. 139.), die Linien DC, DB, und (Fig. 138.) BD ganz rückwärts aufzutragen, so kann man wie in der II. Aufl. §. 195. beliebige Theile von ihnen nehmen.

§. 197.

Aufgabe.

Die unzugängliche Weite AB zu finden, wenn man zu keinem von beyden Objecten vom Standpuncte D aus hinkommen kann.

I. Auflösung: (Fig. 140.) Wenn sich in der Verlängerung von AB ein Punct C abstecken läßt.

1. Man setze bey C einen Stab in die gerade Linie mit A, B,

2. Durch C erreichte man auf AC den Perpendikel CD von beliebiger Länge,

3. Durch einen beliebigen Punct c von CD errichte man abermal den Perpendikel cE,

4. In letzterer Linie setze man bey a einen Stab in die Richtung AD, und einen andern bey b in die Richtung BD.

5. Nun messe man cD, CD, ab, und suche für diese in der nemlichen Ordnung die vierte geometrische Proportionallinie (§. 89.), welche die gesuchte Weite AB ist; es ist nemlich cD : CD = ab : AB.

Beweis.

CE ∥ CA (§. 42. I.), mithin

$\triangle bDc \sim \triangle BDC$, und $\triangle aDb \sim \triangle ADB$ (§. 98.).

also $cD : CD = bD : BD$
und $bD : BD = ab : AB$ } (§. 91.),

folglich $cD : CD = ab : AB$ (§. 218. I. Arithm.).

II. Auflösung: Wenn man in die Richtung AB (Fig. 141.) nicht kommen, also in ihrer Verlängerung einen Punkt abstecken kann.

1. Vom Standpuncte D setze man in beliebiger Entfernung bey F einen Stab in die Richtung AD, und bey E in die Richtung BD,
2. Eben so bey G einen Stab in die Richtung BF, und bey H einen, welcher zugleich in den Richtungen AE und GD steht.
3. Nun messe man alle Seiten von den Dreyecken HDE, EDF, FDG, und verzeichne aus ihnen
4. im verjüngten Maaße der Ordnung nach die Dreyecke hde, edf, fdg, oder die Figur hefg,
5. verlängere die Linien eh, fd, ferner ed, fg, bis erstere in a, letztere in b zusammen stossen.
6. Nun messe man nach dem verjüngten Maaßstabe die Linie ab, so giebt sie die gesuchte Weite AB; das ist, so viel Fuß, Zoll u. s. f. erstere im verjüngten Maaße hält, eben soviel Fuß, Zoll wird AB im gewöhnlichen Maaße lang seyn.

Beweis:

7. Vermög der Construction (Nr. 4.) ist $\triangle hed \sim \triangle HED$, $\triangle edf \sim \triangle EDF$, $\triangle fdg \sim \triangle FDG$ (§. 95.), also

8. hed = HED
   def = DEF, mithin

   hed + def = HED + DEF
   das iſt aef = AEF, afe = AFE: alſo △ aef ∽ △ AEF (§. 93. Zuſ.).

9. Eben ſo iſt efd = EFD
   dfg = DFG

   mithin efd + dfg = EFD + DFG,
   oder bfe = BFE; bef = BEF, mithin △ bef ∽ △ BEF.

10. AE : ae = EF : ef (Nr. 8.)
    BE : be = EF : ef (Nr. 8.)

    AE : ae = BE : be (§. 218. I. Arithm.).
    Ferner HED = hed (Nr. 7.), oder AEB = aeb, alſo

11. △ AEB ∽ △ aeb (§. 94.), folglich
    AE : ae = AB : ab
    AE : ae = EF : ef (Nr. 10), alſo

    EF : ef = AB : ab.

12. Da nun ef im verjüngten Maaße ſo groß als EF genommen wurde (Nr. 3. u. 4.), ſo iſt auch ab im verjüngten Maaße ſo groß als AB (§. 210. II. Zuſ. Arithm.).

III. Auflöſung: Wenn um den Standpunct das Terrain ſehr groß und eben iſt (Fig. 142.).

1. Man wähle den Standpunct D, und ſetze in beliebiger Entfernung bey C einen Stab in die Richtung

tung AD, und bey E einen andern in die Richtung BD.

2. Nun verlängere man DC gegen A, und nehme CH = CD, und setze in H einen Stab; eben so nehme man in der Richtung DB die Linie EG = DE, und setze in G einen Stab.

3. Ferner verlängere man CE zu beyden Seiten, so daß CI = CE = EF wird, und setze bey I und F ebenfalls Stäbe.

4. Nun bringe man bey L einen Stab so an, daß er zugleich in der Richtung GF, und AE liegt, und bey K setze man einen andern Stab in die Richtungen HI, BC.

5. Man messe sowohl GL, als HK, und trage erstere von D nach a in die Verlängerung von AD, und die andere von D nach b auf die verlängerte Linie BD, so daß aD = GL, und bD = HK ist.

6. Endlich messe man ab, welche Linie der gesuchten Weite AB gleich ist.

Beweis:

7. Aus Nr. 2. u. 3. ist △ DCE ≅ △ HCI (§. 24.), mithin

8. D = H, ferner BCD = KCH (§. 13. Zus.), CD = CH (Nr. 2.), also △KHC ≅ △BDC (§. 26.), folglich

9. KH = BD.

10. Eben so ist △ CDE ≅ △ GEF, mithin D = G, ferner AED = LEG, DE = EG, also △ LEG ≅ △ AED, also

11.

11. GL = AD.

12. Da nun Da = GL (Nr. 5.) = AD (Nr. 11.), und Db = HK (Nr. 5.) = BD (Nr. 9.); ferner aDb = ADB; ſo iſt △ aDb ∽ △ ADB, folglich ab = AB.

IV. Abſchnitt.

Von der Ausmeſſung unzugänglicher Weiten mit dem Meßtiſche.

§. 198.

Erklärungen:

Bey dem Vermeſſen mit dem Meßtiſche ſind außer den §. 183. angeführten Inſtrumenten nothwendig:

a. Der **Meßtiſch** ſelbſt (menſula praetoriana; von deſſen Erfinder Joh. Prätorius, der als Profeſſor der Mathematik in Altdorf 1616 ſtarb, alſo genannt). Die weſentlichen Eigenſchaften eines Meßtiſches ſind, daß die Blatte, oder das Reißbrett eben, in eine horizontalen Lage leicht gebracht, und in dieſer Lage noch nach Belieben umher gedrähet werden könne, der Tiſch muß nemlich nicht nur grobe, ſondern auch ſanfte Wendungen geſtatten, und endlich in der beſtimmten Stellung unverrückt feſt bleiben.

b. Ein **Dioptrlineal**, oder **Alhidadenregel**, wo die ſogenannte Viſierebene weſentlich auf der Ebene des

des Lineals senkrecht seyn muß; ist hingegen statt der Dioptern ein bewegliches Fernrohr angebracht, so muß solches immer in der nemlichen Verticalebene bleiben.

c. Eine Setzwaage, verjüngte Maaßstäbe, Handzirkeln, gute Bleystifte.

Anmerkung: Vollständige Einsicht von der Einrichtung und dem Gebrauche dieser Instrumente muß aus dem practischen Unterrichte, oder aus eigenen Lehrbüchern über practische Geometrie geschöpfet werden.

§. 190.

Aufgabe:

Einen auf dem Felde abgesteckten Winkel ACB (Fig. 143.) auf dem Meßtische aufzutragen.

Auflösung:

1) Man bringe den Meßtisch über den Punct C in eine feste horizontale Lage.

2. Vermittels eines Senkels, der an eine Gabel befestiget ist, bestimme man auf den Meßtisch einen Punct c, der senkrecht über C liegt.

3. An c lege man das Dioptrlineal, visire nach dem bey A senkrecht stehenden Staabe AD, und ziehe die Linie ca.

4. Eben so visire man von c nach dem Staabe BE, und ziehe längst der Schärfe des Dioptrlineals die Linie cb; so ist

5. der Winkel acb = ACB.

Beweis:

6. Die Fläche des Meßtisches ist horizontal (Nr. 1.), mithin mit der Horizontalebene ACB parallel (§. 179. II. Zus.).

7. ca, CA sind die Durchschnittslinien der Verticalebene DAC mit der Ebene des Tisches und Bodens, also ca ∦ CA (§. 172. II. Zus.).

8. Eben so ist cb ∦ CB, folglich

9. der Winkel acb = ACB (§. 169.).

§. 200.

Aufgabe:

Die unzugängliche Weite AB finden, wenn man vom Standpuncte C aus (Fig. 144.) nach beyden Objecten visiren, und messen kann.

Auflösung:

1. Man stecke die geraden Linien AC, BC aus, und messe sie.

2. Nun bringe man den Meßtisch über C, und trage den Winkel ACB auf (§. 199.), das ist, man verzeichne den Winkel $\alpha c \beta = ACB$.

3. Im verjüngten Maaße nehme man auf den Schenkel $c\alpha$ die Linie ac = AC, und auf $c\beta$ die Linie cb = CB.

4. Endlich messe man die Linie ab, welche im verjüngten Maaße der gesuchten Weite AB gleich ist.

Be-

Beweis:

5. $acb = ACB$ (Nr. 2.)
$ac : bc = AC : BC$ (Nr. 3.), mithin

6. $\triangle acb \sim \triangle ACB$ (§. 94.) folglich
$ac : AC = ab : AB$, und weil im verjüngten Maaße $ac = AC$, so ist auch $ab = AB$.

§. 201.

Aufgabe:

Die unzugängliche Weite AB finden, wenn man vom Standorte zwar nach beyden Objecten visiren, aber nur nach einem B messen kann.

1. Auflösung: Aus zweyen Standpuncten (Fig. 145.):

1. Man messe vom Standorte C die Entfernung von B, oder die Linie BC.

2. Nun setze man den Meßtisch über C, und visire nach A und B, das ist, man trage den Winkel $\alpha c \beta = ACB$ (§. 199.), und

3. auf $c\beta$ im verjüngten Maaße $cb = CB$ auf.

4. Jetzt nehme man den Tisch von C weg, lasse dafür einen Stab, oder Fähnchen zurück, und verfüge sich nach B.

5. Ueber B stelle man den Meßtisch dergestalt, daß der Punct b genau über B, und bc in die Verticalebene durch BC zu liegen kömmt; so, daß man durch die Dioptern des längst bc gelegten Lineals den bey C zurückgelassenen Stab bedeckt sieht.

6. Nun visire man von b nach A, so wird abc=ABC, und die Visierlinie ba die am vorigen Standpuncte gezogene cα in a durchschneiden.

7. Man messe im verjüngten Maaße ab, so giebt solche die gesuchte Weite AB.

Beweis:

8. acb=ACB, abc=ABC (Nr. 2. u. 6), mithin △acb∽△ACB (§. 93. Zus.), also

9. bc:BC=ab:AB; und da bc im verjüngten Maaße BC gleich ist (Nr. 3.), so giebt auch ab die Größe von der gesuchten Weite AB.

II. Auflösung: Aus einem Standpuncte C (Fig. 146.).

1. Man setze in beliebiger Entfernung von C einen Stab in D, und einen andern bey E in die Richtung AD;

2. Messe die Linien BC, CE, CD.

3. Nun setze man den Meßtisch über C, und visire aus dem über C lothrecht befindlichen Puncte c nach B, A, E, D, und ziehe die entsprechenden Visierlinien cβ, cα, cε, cδ.

4. Auf letztern trage man im verjüngten Maaße cb=CB, cε=CE, cd=CD (Nr. 2.) auf.

5. Endlich ziehe man die Linie de, verlängere sie, bis solche mit cα in a zusammen stoßet, wo

6. die Linie ab die Größe der gesuchten Weite AB im verjüngten Maaße angiebt.

7.

Beweis:

7. $ecd = ECD$ (Nr. 3.), und $ce : cd = CE : CD$ (Nr. 4.), mithin $\triangle ecd \sim \triangle ECD$ (§. 94.), folglich

8. $cde = CDE$.

9. Ferner $\left.\begin{matrix} ace = ACE \\ ecd = ECD \end{matrix}\right\}$ (Nr. 3.)

mithin $ace + ecd = ACE + ECD$, das ist,

10. $acd = ACD$; und da auch $cde = CDE$ (Nr. 8.), so ist $\triangle acd \sim \triangle ACD$ (§. 93. Zus.), folglich

11. $ac : cd = AC : CD$; es ist aber auch $bc : cd = BC : CD$ (Nr. 4.), mithin

$ac : bc = AC : BC$ (§. 218. II. Arithm.).

Ferner $acb = ACB$ (Nr. 3.), also

12. $\triangle acb \sim \triangle ACB$ (§. 94.), und $bc : BC = ab : AB$.

13. Da endlich bc im verjüngten Maaße $= BC$ ist (Nr. 4.), so giebt auch ab die Größe der gesuchten Weite AB an.

§. 202.

Aufgabe:

Die unzugängliche Weite AB finden, wenn man vom Standorte aus zwar nach beyden Gegenständen visiren, aber nicht messen kann.

I. Auflösung: Aus zwey Standpuncten C, D (Fig. 147.).

1. Nehme man die beliebige Standlinie CD, die aber im Verhältnisse zu AB nicht zu klein seyn darf, und messe solche.

2. Nun bringe man den Meßtisch über C, visire nach A, B, D; ziehe die Visirlinien Cα, cβ, cδ, und trage

3. auf letzterer die gemessene Standlinie CD im verjüngten Maaße auf, das ist, cd = CD.

4. Hierauf lasse man bey C einen Stab oder Fähnchen, und bringe den Meßtisch mit den auf selben verzeichneten Linien über D so, daß

5. d über D, und dc in die Richtung DC zu liegen kömmt, oder daß man durch die Dioptern der längst dc angelegten Regel den Stab bey C erblicket.

6. Aus d visire man nach A, B, und ziehe entweder die Visirlinien dm, dn, oder bemerke nur die Durchschnittspuncte a, b derselben mit cα, cβ.

7. Die Linie ab giebt im verjüngten Maaße die gesuchte Weite AB.

Beweis;

8. acd = ACD, adc = ADC (Nr. 2. u. 6.), mithin △ acd ∽ △ ACD (S. 93. Zus.).

9. Eben so ist bcd = BCD, bdc = BDC; also △ bcd ∽ △ BCD; folglich

10. bc : BC = ed : CD
ac : AC = ed : CD (Nr. 8.), mithin

bc : BC = ac : AC,

Ferner acb = ACB, alſo △ acb ∽ △ ACB, folglich

11. ac : AC = ab : AB
ac : AC = : cd : CD (Nr. 10.), mithin

cd : CD = ab : AB.

12. Da nun cd im verjüngten Maaße die Größe CD angiebt, ſo beſtimmt auch ab die Länge von AB.

II. Auflöſung: Aus einem Standpuncte C (Fig. 148.).

1. Man nehme die beliebige Standlinie CD, und ſetze bey E einen Stab in die Richtung BD, und einen andern bey F in die Richtung AD.

2. Ueber C bringe man den Meßtiſch, viſire nach A, F, B, E, D, und ziehe die Viſirlinien cα, cφ, cβ, cε, cδ.

3. Nun meſſe man die Linien CD, CE, CF, und trage ſie im verjüngten Maaße auf die entſprechende Viſirlinien auf, nemlich cd = CD, ce = CE, cf = CF.

4. Man ziehe die gerade Linie de, und verlängere ſie, bis ſolche mit cβ in b zuſammen ſtoſſet.

5. Eben ſo ziehe man df, und verlängere ſolche, bis ſie cα in a durchſchneidet.

6.

6. Endlich messe man ab, welche im verjüngten Maaße die gesuchte Weite AB angiebt.

Beweis:

7. ecd = ECD (Nr. 2.),
ce : CE = cd : CD (Nr. 3.), mithin
△ ECD ∽ △ ecd (§. 94.), und cde = CDE, das ist.

8. cdb = CDB; bcd = BCD (Nr. 2.), also
△ bcd ∽ △ BCD, mithin
cb : CB = cd : CD.

9. fcd = FCD (Nr. 2.),
cf : CF = cd : CD (Nr. 3.), also
△ fcd ∽ △ FCD, und cdf = CDF, oder

10. cda = CDA; acd = ACD (Nr. 2.), also
△ acd ∽ △ ACD, mithin
ac : AC = cd : CD,
Ferner cb : CB = cd : CD (Nr. 8.), folglich

11. ca : CA = cb : CB, und da ferner acb = ACB (Nr. 2.),
so ist △ acb ∽ △ ACB, folglich

12. ca : CA = ab : AB
ca : CA = cd : CD (Nr. 10.), mithin
cd : CD = ab : AB.

13. Nun ist cd im verjüngten Maaße = CD (Nr. 3.), folglich giebt ab ebenfalls die Länge von der gesuchten Weite AB.

V.

V. Abſchnitt.

Von den Methoden vermittels Stäbe eine Figur auf dem Felde in Grund zu legen.

§. 203.

Aufgabe:

Eine geradlinigte Figur ABCDEA (Fig. 149.) in Grundriß zu legen (§. 180. e.), wenn man darinn allenthalben, wie z. B. bey Aeckern und Wieſen, herumgehen, und meſſen kann.

Auflöſung:

1. Man meſſe alle Seiten und Diagonalen, nemlich AB, BC, CD, DE, EA, BD, BE.

2. Aus dieſen Linien verzeichne man der Ordnung nach im verjüngten Maaße die Dreyecke abe, ebd, dbc, ſo iſt

3. abcdea der verlangte Grundriß.

Beweis:

4. Da alle Seiten und Diagonalen der verzeichneten Figur abcdea den Seiten und Diagonalen der gegebenen Figur ABCDEA proportionirt ſind (Nr. 2.), ſo ſind

5) die Dreyecke der Ordnung nach einander ähnlich (§ 95.), nemlich △abe∽△ABE, △ebd∽△EBD, △dbc∽△DBC, alſo

6. eab=EAB; ferner abe+ebd+dbc=ABE+EBD +DBC, das ist, abc=ABC; eben so ist bcd =BCD u. s. f.

7. Die beyden Figuren haben also gleichviel Seiten, die der Ordnung nach einander proportionirt sind (Nr. 2.), alle Winkel in einerley Ordnung sind ebenfalls gleich (Nr. 6.), folglich ist abcdea ~ ABCDEA (§. 91.).

§. 204.

Aufgabe:

Eine geradlinigte Figur ABCDEA auf dem Felde (Fig. 149.) in Grund zu legen, wenn man sie, wie z. B. einen Teich, oder moosichten Grund, bloß umgehen kann, ohne hinein zu kommen.

Auflösung:

1. Man halte ein genaues Diarium, oder was bey kleinen Vermessungen noch besser ist, man verzeichne einen Brouillon, das ist, eine Figur, die dem bloßen Ansehen nach der gegebenen ähnlich ist.

2. Nun messe man alle Seiten, und verzeichne ihre Länge in's Diarium, oder den Brouillon.

3. Eben so bestimme man alle Winkel (§. 191. Nr. 1. u. 2.), und bemerke sie ebenfalls.

4. Endlich verzeichne man aus diesen Seiten und Winkeln der Ordnung nach im verjüngten Maaße die Figur abcdea (§. 57.), so ist sie der gegebe-

nen

nen auf dem Felde ähnlich (§. 91.), mithin der verlangte Grundriß.

Zusatz: Mißt man alle Seiten, so erhält man die letzten drey Winkel unmittelbar beym Auftragen (§. 57. III.); mißt man hingegen alle Winkel, so bekömmt man beym Auftragen die letzten zwey Seiten (§. 57. I.). Allemal dienen die überflüßig gemessenen Stücke zur Berichtigung und Probe der Auflösung.

§. 205.

Erklärungen:

Wenn längst einer krummen Linie a b c d e f m n q r (Fig. 150.) die gerade AB, und aus erstlerer von den Puncten a, b, c u. s. f. die Perpendikel aα, bβ, cγ u. s. f. auf letztere gezogen sind, so heißen in Beziehung auf die krumme Linie

a. die Linien Aα, Aβ, Aγ u. s. f. die Abscissen, so wie die ganze Linie AB die Abscissenlinie, und A ihr Anfangspunct.

b. Die Perpendikel aα, bβ, cγ, dδ, fφ u. s. f. nennet man die entsprechende Ordinaten.

I. Zusatz: Die Lage eines jeden Punctes z. B. b der krummen Linie gegen die gerade ist durch seine entsprechende Abscisse Aβ, und Ordinate bβ bestimmt.

II. Zusatz: Da die Ordinaten aα, bβ, cγ auf der einen, hingegen fφ, mμ, nν auf der andern entge-

gen

gen gesetzten Seite der Abscissenlinie AB liegen, so bezeichnet man die Lage der erstern durch +, und jene der zweyten mit —. Für den Punct e ist Ae die Abscisse, hingegen die Ordinate = o.

§. 206.

Aufgabe:

Eine krumme Linie auf dem Felde (Fig. 150.) z. B. die Beugungen eines Flußes, oder Weges in Grund zu legen.

Auflösung:

1. Man spanne längst der krummen Linie die Meßkette AB als Abscissenlinie.
2. Von allen merklichen Krümmungen a, b, c, d, e ziehe man auf AB Perpendikel oder Ordinaten.
3. Messe alle Abscissen und Ordinaten, und bemerke ihre Länge und Lage im Manual, oder einem Brouillon.
4. Nun ziehe man auf dem Papier eine gerade Linie, und bestimme auf ihr im verjüngten Maaße die die Abscissen $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$ u. s. f.
5. Durch α, β, γ, δ errichte man Perpendikel und gebe ihnen im verjüngten Maaße die Länge und Lage der Ordinaten $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ u. s. f.
6. Mit freyer Hand ziehe man endlich durch die Puncte a b c d e f m n q r eine krumme Linie, welche der gegebenen auf dem Felde um so ähnlicher seyn wird,

wird, je mehr Puncte derſelben durch Abſciſſen und Ordinaten beſtimmt wurden (§. 205. I. Zuſ.)

§. 207.

Aufgabe:

Eine krummlinigte Figur auf dem Felde (Fig. 151.) in Grund zu legen.

Auflöſung:

1. Man umſchließe ſie mit der geradlinigten Figur ABCD, die man durch willkührlich ausgeſteckte Stäbe beſtimmt.
2. Dieſe geradlinigte Figur lege man nach §. 203. oder 204. in Grund.
3. Nun beſtimme man für die merklichſten Beugungen der krummlinigten Figur die entſprechenden Abſciſſen und Ordinaten;
4. Trage ſolche im verjüngten Maaße an die treffenden Stellen im Grundriße auf.
5. Durch die Endespuncte der Ordinaten ziehe man endlich mit freyer Hand ringsumher eine krumme Linie, ſo erhält man eine Figur, welche der gegebenen auf dem Felde um ſo ähnlicher iſt, je mehr Puncte durch Abſciſſen und Ordinaten beſtimmt wurden.

VI. Abſchnitt.

Von den Methoden, vermittels des Meßtiſches eine Figur auf dem Felde in Grund zu legen.

§. 208.

Aufgabe:

Ein Feld ABCDEA (Fig. 152.) in Grund zu legen, wenn man von einem Puncte O innerhalb nach allen Ecken ungehindert viſiren, und meſſen kann.

Auflöſung:

1. Man meſſe von O nach allen Ecken, oder die Linien AO, BO, CO, DO, EO, und bemerke ihre Länge im Brouillon.
2. Nun bringe man den Meßtiſch über O, und beſtimme auf ſelben den Punct o, der lothrecht über O liegt.
3. Von o ziehe man nach allen Ecken die Viſirlinien, und trage im verjüngten Maaße die entſprechende Länge der Nr. 1. gemeſſenen Linien auf, das iſt, oa = OA u. ſ. w.
4. Endlich ziehe man die geraden Linien ab, bc, cd, de, ea, ſo iſt abcdea der verlangte Grundriß.

Beweis:

5. △ aob ∽ △ AOB, △ boc ∽ △ BOC u. ſ. f. (§. 94.) mithin iſt

6.

6. bao = BAO
   oae = OAE, also

   bao + oae = BAO + OAE, das ist, bae = BAE; eben so folgt, daß abc = ABC, und so von allen übrigen Winkeln.

7. Ferner folgt aus Nr. 5, daß die Seiten ab, bc, cd, de, ea den Seiten AB, BC, CD, DE, EA proportionirt sind, folglich

8. ist abcdea ∞ ABCDEA (§. 91.), mithin der verlangte Grundriß.

§. 209.

Aufgabe:

Eine Figur ABCDA auf dem Felde (Fig. 153.) in Grund zu legen, die man zwar umgehen, aber in die man nicht hineinkommen kann, wenn man sie aus einem Standorte A ganz übersieht.

Auflösung:

1. Man messe alle Seiten AB, BC, CD, DA.

2. Nun bringe man den Tisch über A, und ziehe nach allen Ecken die Visirlinien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$.

3. Im verjüngten Maaße nehme man ab = AB, und trage sie auf die Visierlinie $a\beta$.

4. In eben dem verjüngten Maaße nehme man bc = BC, und beschreibe aus b einen Bogen, welcher $a\gamma$ in zwey Puncten c, n durchschneiden wird, es lassen sich nemlich

5.

5. aus dem Winkel bay, nebst den Seiten ab, bc, wenn bc < ab ist, zwey Dreyecke abc, und abn construiren (§. 38. VI. Zus.). Da nun ab, bc den Seiten AB, BC proportionirt sind, so wird eines dieser Dreyecke dem △ABC ähnlich, mithin in solchem der Winkel bey b jenem bey B gleich seyn. Nun läßt sich gewöhnlich nach dem bloßen Augenmaße bestimmen, welchen von den beyden Puncten c, n man wählen müsse, damit b = B wird; sollte sich aus dem Augenmaaße der Winkel B nicht beurtheilen lassen, so müßte man ihn messen, und bey b auftragen.

6. Aus c beschreibe man wieder mit cd, welches im verjüngten Maaße so groß als CD ist, einen Bogen, und bestimme auf die nemliche Art den Punct d.

7. Endlich verbinde man alle auf diese Art gefundene Puncte durch gerade Linien, so ist abcda der verlangte Grundriß.

Beweis:

8. Da alle Seiten im verjüngten Maaße aufgetragen werden, so hat abcda mit ABCDA gleiche viele, und proportionirte Seiten.

9. Da ferner △abc ∽ △ABC (Nr. 5.), △acd ∽ △ACD, also die Winkel bac + cad = BAC + CAD, oder bad = BAD; eben so acb + acd = ACB + ACD, oder bcd = BCD; endlich abc = ABC, adc = ADC, so sind auch alle Winkel der Ordnung gleich, folglich abcda ∽ ABCDA (§. 91.). §. 210.

§. 210.

Aufgabe:

Eine Figur ABCDEA auf dem Felde (Fig. 154.) in Grund zu legen, die man bloß umgehen kann, ohne hinein zu kommen.

Auflösung:

1. Man umgehe die Figur, und setze an alle Ecke derselben numerirte Zeichenstäbe.
2. Wenn A der Anfangspunct der Vermessung ist, so messe man sowohl die erste Seite AB, als die letzte AE;
3. Bringe nun den Tisch über A, trage den Winkel A auf, und schneide auf dessen Schenkeln im verjüngten Maaße ab = AB, ae = AE ab.
4. Jetzt lasse man bey A ein Fähnchen zurück, nehme jenes bey E weg, begebe sich nach B, und messe BC.
5. Hierauf setze man den Tisch über B so, daß b genau über B lothrecht, und ba längst BA liegt.
6. In dieser Lage des Meßtisches visire man nach C, und trage auf dieser Linie BC im verjüngten Maaße auf, so ist zugleich der Winkel B bestimmt, das ist b = B.
7. Auf die nämliche Art trage man an allen folgenden Ecken die Winkel, und im verjüngten Maaße die entsprechenden Seiten auf.
8. Ist man in der Vermessung so weit gekommen, daß man alle Seiten und Winkel, außer der vor-

letzten Seite DE nebst den beyden anliegenden Winkeln D, E aufgetragen hat, so ist das Vieleck auf dem Meßtische vollkommen bestimmt, man darf nur die gerade Linie de ziehen (§. 57. II.), und

9. abcdea wird der verlangte Grundriß seyn; indessen

10. um sich zu überzeugen, daß man nirgend gefehlet habe, so messe man noch die Seite DE, welche so groß seyn muß, als de im verjüngten Maaße angiebt.

Beweis:

Offenbar haben abcdea und ABCDEA eine gleiche Anzahl Seiten, die Winkel sind in beyden der Ordnung nach einander gleich, und die gleichnamigen Seiten proportionirt, mithin ist abcdea ∽ ABCDEA.

§. 211.

Aufgabe:

Zwischen zwey Puncten A und E (Fig. 155.) auf dem Felde eine gerade Linie abzustecken, wenn man von A aus E nicht sehen kann, auch zwischen A und E keine Puncte vorhanden sind, von denen man A sowohl, als E zugleich sehen könnte.

Auflösung:

1. Wenn man von A aus gleich nicht unmittelbar in gerader Richtung nach E kommen kann, so wird man durch Umwege, wie durch ABCDE vorgestellet ist, nach E kommen können.

2.

2. Nun bildet aber ABCDEA eine Figur, von der man alle Seiten und Winkel messen kann, außer der Seite AE nebst ihren anliegenden Winkeln, die aber durch die übrigen Stücke, so wie das Vieleck selbst, vollkommen bestimmt sind (§. 57. II.).

3. Man lege daher diese Figur in Grund (§. 210.), und

4. bringe den Tisch mit dem darauf verzeichneten Grundriße abcdea dergestalt über A, daß aA senkrecht auf dem Boden steht, und ab in die Richtung AB zu liegen kömmt.

5. Nun ist bae = BAE, folglich fällt ae in die gesuchte Richtung AE, man lege also die Diopter an ae, und lasse nach dieser Richtung Stäbe stecken, wo die vorkommenden Gesträuche, oder auch Bäume weggeräumt werden müssen.

§. 212.

Aufgabe:

Eine Figur ABCDEFA (Fig. 156.) in Grund legen, die man umgehen kann, ohne hinein zu kommen, wenn ein, oder mehrere Gegenstände N, R in ihr an allen Ecken sichtbar sind.

Auflösung:

1. Man suche von der Figur eine Seite AB aus, die so eine Lage hat, daß AN, BN; oder AR, BR mit ihr weder zu spitzige, noch zu stumpfe Winkel machen.

2. Meſſe dieſe Linie AB.

3. Aus A viſire man nach N, R, B, und auf letzterer Richtungslinie nehme man ab im verjüngten Maaße ſo groß, als AB.

4. Nun laſſe man bey A einen Stab, oder Fähnchen zurück, bringe bey B den Tiſch in ſo eine Richtung, daß b ſenkrecht über B, und ba längſt BA liegt.

5. Von b viſire man nach N, R, wodurch n, r beſtimmt werden, und nach C, letztere Viſirlinie ſey bγ.

6. Ohne die Seite BC zu meſſen, laſſe man das Fähnchen von A nach B bringen, und

7. Stelle den Tiſch bey C ſo, daß γb längſt Cb liegt.

8. Nun lege man das Diopterlineal an n, und viſire nach N, ſo werden ſich die Richtungslinien Nn, bγ in einem Zeitpuncte c ſchneiden.

9. Endlich viſire man von c nach D, und beſtimme auf dem Boden den Punct C', über welchen c ſenkrecht iſt.

10. Zum Belege, ob man bisher richtig verfahren ſey, lege man die Diopter an die Linie cr, ſo muß beym Viſiren der Gegenſtand R in dieſer Richtung erſcheinen.

11. Auf die nemliche Art wie bisher bey C (Nr. 6 — 10.) verfahre man an allen übrigen Standpuncten D, E, F, ſo erhält man auf dem Meßtiſche

12.

12. eine Figur abcdefa, welche der verlangte Grundriß ist.

Beweis:

13. Auf jedem Standpuncte wird eine Seite, und durch das Visiren nach den vorhergehenden, und nächstfolgenden Puncte ein Winkel auf dem Meßtische bestimmt; mithin hat abcdefa eben so viele Seiten als ABCDEFA, und die Winkel sind der Ordnung nach in beyden Figuren einander gleich.

14. $\triangle$ anb $\sim \triangle$ ANB (§. 93. Zus.), mithin
ab : AB = bn : BN.

15. Ferner ist der Winkel nbc = NBC; ben = BCN, also wieder $\triangle$ bnc $\sim \triangle$ BNC, mithin
bc : BC = bn : CN, folglich aus Nr. 14.

16. ab : AB = bc : BC.

17. Auf die nemliche Art läßt sich beweisen, daß bc : BC = cd : CD = de : DE u. s. f., mithin sind

18. Gleichnamigte Seiten einander in beyden Figuren proportionirt. Aus diesen und den Nr. 13. angeführten Bestimmungen folgt endlich, daß abcdefa $\sim$ ABCDEFA (§. 91.).

Anmerkung: Diese eben angeführte Methode, Figuren aus ihrem Umriße in Grund zu legen, ist weniger mühsam, kürzer, und größtentheils zuverläßiger, als die §. 210. angezeigte, sie verdient daher allemal den Vorzug, wenn die Natur des Gegenstandes ihre Anwendung gestattet.

§. 213.

§. 213.

Aufgabe:

Ein Feld ABCDEA (Fig. 157.), welches man aus zwey Standörtern F, G ganz übersehen kann, in Grund zu legen.

Auflösung:

1. Man verfahre ganz nach der Anleitung der I. Auflösung §. 202; nur muß man aus jedem Standorte nach allen Puncten oder Ecken A, B, C. D, E visiren.

2. Am Ende verbinde man die Durchschnittspuncte a, b, c, d, e der Ordnung nach mit geraden Linien, so ist

3. abcdea der verlangte Grundriß.

Beweis:

4. Da man für jedes Eck auf dem Meßtische einen Durchschnittspunct ihrer Visirlinien erhält, so bekömmt die auf dem Meßtische verzeichnete Figur eben so viele Ecke, mithin auch Seiten (§. 15. II. Zus.), als das Feld Ecke und Seiten hat.

4. Die Linien ab, bc, cd, de, ea sind im verjüngten Maaße eben so groß, als die Weiten AB, BC, CD, DE, EA; daher sind die gleichnamigten Seiten beyder Figuren einander proportionirt (§. 202. I. Aufl.).

6. Eben so sind bd, ce, da, eb, ac im verjüngten Maaße so groß, als die Weiten BD, CE, DA, BE, AC; folglich 7.

7. $\triangle$ bcd $\sim$ $\triangle$ BCD (§. 95.), alſo c = C.
Eben ſo iſt $\triangle$ cde $\sim$ $\triangle$ CDE, mithin d = D.

8. Auf ähnliche läßt ſich darthun, daß alle folgenden Winkel in beyden Figuren der Ordnung nach einander gleich ſind, folglich iſt

9. abcdea $\sim$ ABCDEA (§. 91.).

Zuſatz: fa, fb, fc u. ſ. w. geben im verjüngten Maaße die Entfernungen FA, FB, FC u. ſ. f. an.

Anmerkung: Bey dieſer Aufgabe, ſo wie beym Gebrauche des Meßtiſches überhaupt, iſt nichts ſorgfältiger zu beobachten, als daß man ſich, ehe man einen Standort verläßt, durch Nachviſiren überzeuge, daß der Meßtiſch in ſeiner Anfangs beſtimmten Lage unverrückt während der Beobachtung geblieben ſey.

§. 214.

Aufgabe:

Ein Feld ABCDEFGHIA (Fig. 158.) in Grund legen, wenn man aus zwey Standörtern M, N entweder die ganze Figur nicht überſehen kann, oder wenn einige Puncte gegen die Standlinie MN ſo eine Lage haben, daß ihre Viſirlinien zu ſtumpfe, oder ſpitzige Winkel bilden.

Auflöſung:

1. Aus der Standlinie MN beſtimme man nach §. 213. ſo viele Puncte des Feldes im Grundriße, als angeht, das iſt, alle Puncte, die man aus

den

den beyden Standörtern deutlich sehen kann, und deren Richtungen sowohl unter sich, als mit MN weder zu spitzige, noch zu stumpfe Winkel machen.

2. Aus eben dieser Standlinie bestimme man im Grundrisse mit möglichster Sorgfalt o, der einem Puncte O auf dem Felde entspricht, welcher gegen MN sowohl, als die noch zu bestimmenden Puncte eine schickliche Lage hat.

3. Im Grundrisse ist nun aus Nr. 2. sowohl die Länge von MO, als NO bestimmt (§. 119. Zus.), man begebe sich also

4. ohne eine dieser letztern beyden Linien zu messen nach O, und bestimme die noch übrigen Puncte der Figur im Grundrisse.

5. Sollten durch die bisherigen drey Standorte M, N, O noch nicht die ganze Figur in Grund gelegt werden können, so müßte man eben so wie (Nr. 2. u. 3.) einen vierten, und vielleicht noch einen fünften und sechsten Standort u. s. f. bestimmen, und aus ihnen die noch fehlenden Theile des Feldes in Grund legen.

Anmerkung: Diese Aufgabe ist eine der merkwürdigsten, und dient ganze Fluren in Grund zu legen.

§. 215.

Aufgabe:

Eine krummlinigte Figur (Fig. 151.) auf dem Felde in Grund zu legen.

Auflö-

Auflösung:

Man verfahre ganz nach der Anleitung des 207ten §, bestimme aber den Grundriß der willkührlich ausgesteckten geradlinigten Figur ABCD vermittels des Meßtisches nach einer im gegenwärtigen VIten Abschnitte vorgetragenen Methode.

Anmerkung: Um die Aehnlichkeit des Grundrisses mit dem Felde noch anschaulicher, und die Lage des Feldes für folgende Zeiten noch kenntlicher zu machen.

a. Werden die vorkommenden Gegenstände, als Gebäude, Flüße, Wege, Berge, Aecker, Wiesen, Bäume u. s. w. gezeichnet, und gewöhnlich auch illuminirt.

b. Alle angränzende Grundstücke werden mit ihren Nämen oder die Nämen ihrer Besitzer an ihren Stellen aufgetragen.

c. Selbst die Lage mehr entfernter, aber merkwürdiger Gegenstände zeigt man durch gezogene Visirlinien an.

d. Die Weltgegenden macht man durch die aufgetragene Richtung der Magnetnadel kenntlich.

e. Am Ende wird dem Grundrisse oder Plane noch der gebrauchte verjüngte Maaßstab beygefüget.

VII. Abschnitt.

Von Ausmessung und Vertheilung der Felder.

§. 216.

Erklärungen:

In der Feldmeßkunst dienen die §. 148. angeführten Flächenmaaße; in Baiern hält

a. der baierische oder **Münchner Quadratschuhe** 100 **Decimalquadratzolle**, und letzterer 100 **Decimalquadratlinien.**

b. Eine **Quadratruthe** hält 100 baierische Quadratschuhe, und

c. 40000 **Quadratschuhe machen ein baierisches Tagwerk** aus.

I. **Anmerkung:** In den ältern Grundbeschreibungen werden die Aecker durch die Anzahl der Piffing, oder durch Einsetze, die Wiesen durch Maden und Tagwerke, die Waldungen durch Holztagwerke bestimmt, aber alle diese Maaße sind sehr veränderliche und schwankende Bestimmungen, die an jedem Orte, und wieder im nemlichen Orte zu verschiedenen Zeiten verschieden sind; diesen Verwirrungen wurde durch das baierische Landrecht vom Jahre 1616 ein Ziel gesetzt, und die Größe eines Tagwerkes ohne Unterschied im 82. Artikel der Forstordnung auf folgende Art bestimmt: „Ordnen derwegen hiemit, und wöl„len, daß fürterhin, in kaufen und verkaufen der

„Holz-

„Holzmarchen, wie auch Aecker, Wismader, und an„derer Feldgründen, zwischen den Jucharten, und „Tagwerchen, der Grösse halben, kein Unterschied „sol gehalten, sonder diß für ein Juchart oder Tag„werk gerechnet werden so der Lenge nach 25 Rue„ten, deren jede 10 Münchner Werkschueh lang, „und nach der Braite 16 Rueten, also der ganze „Platz 40000 Creuzschueh halten thuet.“

II. **Anmerkung:** Da der Schuh, mithin auch der Quadratschuh nach der Decimaleintheilung die nemliche Länge, wie nach der Duodecimaleintheilung enthält, so sind 100 Dec. □ Zoll = 144 Duodec. □ Zoll = 20736 Duodec. □ Linien; umgekehrt sind 144 Duodec. □ Zoll = 100 Dec. □ Zoll = 10000 Dec. □ Linien. Eine Decimal □ Ruthe hält 100 □ Fuß; eine Duodecimal □ Ruthe hingegen 144 □ Fuß. Aus diesen läßt sich die eine Eintheilung auf die andere reduciren.

III. **Anmerkung:** An einigen Oertern ist nicht der Quadratfuß, sondern die Quadratruthe das allgemeine Flächenmaaß; man muß also zuerst die Länge der Ruthe an einem gegebenen Orte kennen, ehe man die Länge ihres zehnten Theiles, oder die Länge eines geometrischen Fußes für dieses Ort bestimmen kann.

§. 217.

Reductionstabelle der in verschiedenen Ländern gewöhnlichen Ruthen auf den ehemal. königl. Pariser Fuß.

Namen der Länder.	1 Ruthe hält an landesüblichem Fußmaaße.	1 Ruthe hält an Pariser Duodecimallinien.	Logarithmus.
Anspach. Ruthe	12 F.	1584	3,1997552
Augsburg . . .	10	[1313	[3,1182647
		[1312,9	[3,1182316
Baiern	10	[1293,8	[3,1118671
		[1293,83	[3,1118772
Brandenburg .	12	1669,56	3,2226021
Engeland (Rod.)	16,5	2230,107	3,3483257
Frankreich			
alter kön. Fuß .	1	144	2,1583625
. . . Toise . .	6	864	2,9365137
kleine Perche . .	18	2592	3,4136350
mittlere Perche .	20	2880	3,4593925
große Perche . .	22	3168	3,5007852
neues Maaß Mètre	—	443,296	2,6466938
Leipzig. Ruthe .	15 1/3 Vauf	1900.4	3,2788450
Nürnberg . .	16	[2155,2	[3,3334876
		[2156,544	[3,3337584
Rheinländische .	12	[1669,56	[3,2226021
		[1670,196	[3,2227675
Schweden . . .	16	2105,6	3,3233759
Wien Klafter . .	6	840,78	2,9246824
Würtemberg Ruthe	16	[2044,8	3,3106508
		[2028.8	3.3072392

Nach der Angabe vom Tobias Maier hält der Würtenb. Fuß 1271,8, nach andern Tabellen von Gebhard, Schulz, Vega hingegen 126,8 Par. Linien.

An-

Anmerkung: Die Verhältnisse der verschiedenen Fußmaaße sind in der I. Abtheil. des Anhanges zur Arithm. in einer Tabelle dargestellt.

§. 218.

Aufgabe:

Vermittels der Tabelle §. 217. die Ruthen verschiedener Länder, z. B. brandenburgische in baierische zu verwandeln.

Auflösung:

1 brandenb. Ruthe : 1 baier. Ruthe $= 1669{,}56 : 1293{,}8$;

mithin 1 brandenb. Ruthe $= \frac{1669{,}56}{1293{,}8}$ baier. Ruthen.

folglich n brandenb. Ruthen $= \frac{n.1669{,}56}{1293{,}8}$ baier. R.

Um die Auflösung durch Logarithmen zu erleichtern, sind in der letzten Spalte die entsprechenden Logarithmen angegeben:

z. B. 36 brandenb. Ruthen $= \frac{36 \times 1669{,}56}{1293{,}8}$ baier. R.

Nun ist log. $36 = 1{,}5563025$

log. $1669{,}56 = 3{,}2226021$

compl. dec. log. $1293{,}8 = 6{,}8881329 - 10$ (§. 249. Anm.)

$$\log. \frac{36 \times 1669{,}56}{1293{,}8} = 11{,}6670375 - 10$$

$$= 1{,}6670375 = \log. 46{,}4535$$

Folglich betragen 36 Brandenburger-Ruthen im baierischen Maaße 46 Ruthen, 4 Fuß, 5 Zoll, 5,5 Lin.

Zusatz: Auf ähnliche Art lassen sich die Ruthen anderer Oerter, die in der obigen Tabelle nicht enthalten sind, auf einander reduciren, wenn man nur das Verhältniß einer solchen Ruthe zu irgend einem bekannten Längenmaaße weiß.

§. 219.

II. Aufgabe:

Zwey verschiedene Flächenmaaße, z. B. Anspacher Morgen in baierische Tagwerke zu verwandeln.

Auflösung:

1 Anspacher Morgen: 1 baier. Tagwerk = 43560 : 32291 (§. 219.).

$$1 \text{ Ansp. Morg.} = \frac{43560}{32291} \text{ baier. Tagw.}$$

$$\text{Folglich } n \text{ Ansp. Morgen} = \frac{n \cdot 43560}{32291} \text{ baier. Tagw.}$$

Beyspiel

$$100 \text{ Anspacher Morgen} = \frac{4356000}{32291} \text{ baier. Tagw.}$$

Nun ist $\log. 4356000 = 6,6390879$

$\log. 32291 = 4,5090692$

$2,1300187$

Folglich geben 100 Anspacher Morgen im baierischen Flächenmaaße 134,921 Tagwerk, das ist, 134 Tagwerk und 36840 baier. □ Fuß.

§. 221.

Aufgabe:

Den Flächeninhalt eines Feldes ABCDEA (Fig. 152.) finden, dessen Gränzen lauter gerade Linien sind.

Auflösung:

Man lege es nach der Anleitung der vorhergehenden beyden Abschnitte in Grund, und suche den Flächeninhalt

inhalt des Grundrißes abcdea (§. 153.), so ist solcher im verjüngten Maaße eben so groß, als der Flächeninhalt des Feldes im gewöhnlichen Flächenmaaße.

Beweis:

abcdea : ABCDEA = $ab^2 : AB^2$ (§. 159.).

Nun ist ab im verjüngten Maaße eben so lang, als AB im gewöhnlichen Maaße, also hält ab^2, und AB^2 jedes nach seinem Flächenmaaße eine gleiche Anzahl Quadratruthen, Quadratfuß u. s. f. Folglich giebt auch der Flächeninhalt abcdea im verjüngten Flächenmaaße den Flächeninhalt von ABCDEA im gewöhnlichen Flächenmaaße an (§. 210. II. Zus. Arithm.).

§. 222.

Aufgabe:

Den Flächeninhalt eines Feldes finden, dessen Seiten krumme Linien sind.

Auflösung:

1. Man lege sie in Grund (§. 207. u. 215.).
2. Stellet nun z. B. ACBD (Fig. 159.) diesen Grundriß dar, so nehme man die Puncte A, b, c, d, e, f u. s. f. so nahe aneinander, daß Ab, bc, cd, de, ef, und eben so $A\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\varphi$ als gerade Linien, mithin $bA\beta$ ohne merklichen Unterschied als ein Dreyeck, hingegen $b\gamma$, $c\delta$, $d\varepsilon$, $e\varphi$ u. s. f. als Trapeze angesehen werden

können, folglich der ganze Grundriß in Trapezen getheilet ist (§. 142.).

3. Endlich berechne man den Flächeninhalt dieser Trapeze (§. 153.), so kömmt derselbe dem Flächeninhalte des krummlinigten Feldes um so näher, je ähnlicher der Grundriß ist, und je kleiner die Abweichung der krummen Linien $A\beta$, $\beta\gamma$, ..., Ab, bc u. s. f. von geraden Linien ist.

§. 223.

Aufgabe:

Ein Feld in eine gegebene Anzahl gleicher Theile, oder aber solcher ungleicher Theile zu theilen, die ein bestimmtes Verhältniß unter sich haben.

Auflösung:

Man lege das Feld in Grund, und theile den verzeichneten Grundriß in die gegebene Anzahl gleicher (§. 156.) oder ungleicher Theile nach dem bestimmten Verhältnisse (§. 157.).

Anmerkung: In der Ausübung wird in der Aufgabe gewöhnlich nicht nur die Anzahl und das Verhältniß, sondern auch eine bestimmte Lage dieser Theile gegeneinander, und meist noch eine bestimmte Figur derselben festgesetzet. Die verschiedene Auflösungsmethoden dieser sehr wichtigen Aufgabe muß man aus eigenen Lehrbüchern der practischen Geometrie erlernen, dabey hat aber noch immer eigener Scharfsinn und practische Uebung das meiste zu thun.

III. Theil.

Die Stereometrie.

I. Hauptstück.

Von körperlichen Winkeln, und Körpern überhaupt.

§. 224.

Erklärung:

Wenn (Fig. 160.) drey, oder mehrere geradlinigte Winkel BAC, BAD, CAD in verschiedenen Ebenen so liegen, daß sie alle den Scheitel A, und jede zwey nächste einen Schenkel gemein haben, so heißt die Neigung aller dieser Ebenen zu einander ein körperlicher Winkel (angulus solidus), oder eine körperliche Ecke.

Zusatz: Die Summe aller geradlinigten Winkel, welche eine körperliche Ecke einschließen, muß kleiner, als 360° seyn. Denn hielten diese Winkel zusammen 360°, so lägen sie in einer Ebene (§. 14. III. Zus.), da sie nun eine Ecke, das ist, eine Höhlung bilden sollen, so muß ihre Summe kleiner, als 360° seyn.

Anmerkung: Den strengen Beweis dieses Zusatzes lasse ich absichtlich weg, weil sich in der Folge kein Satz, die Aufzählung der regulären Körper ausgenommen, auf diesen Zusatz stützet, und, weil die vollständige Darstellung desselben für gegenwärtiges Lehrbuch zu weitläufig ist.

§. 225.

Lehrsatz:

Zwey körperliche Ecke A, a (Fig. 160.), in welchen alle geradlinigte Winkel, und die Neigungen jeder zwey Ebenen gegeneinander der Ordnung nach gleich sind, passen ineinander, oder sind congruent.

Beweis:

1. Man lege die Ebene bad dergestalt auf BAD, daß a auf A, ad längst AD zu liegen kömmt, so fällt, da der Winkel bad = BAD ist, ab auf AB (§. 10. II. Zus.).

2. Vermög der Annahme haben die Ebenen bad, bac gegen einander die nemliche Neigung, wie BAD, BAC, mithin fällt die Ebene bac auf BAC, und weil diese Winkel gleich sind, ac auf AC.

3. Auf die nemliche Art folgt, daß die Ebene cad auf CAD, und alle folgenden Ebenen auf einander fallen, mithin die Ecke a und A ineinander passen, folglich congruent sind.

1. Zusatz: Durch alle geradlinichte Winkel, und Neigungen jeder zwey Ebenen gegeneinander ist eine körperliche

perliche Ecke A vollkommen bestimmt; denn eine andere Ecke a mit eben diesen Winkeln und Neigungen der Ebenen ist A congruent, folglich mit A einerley.

II. Zusatz: Drey Ebenen BAD, BAC, CAD schließen wohl eine Ecke A, aber keinen Körper ein (§. 2.); denn auf der Seite BCD ist der Raum noch unbegränzt.

§. 226.

Erklärung:

Die ganze Gränze, inner welche ein Körper eingeschlossen ist, heißt seine **Oberfläche** (Superficies), die also aus mehrern Ebenen, oder aus Ebenen und krummen Flächen, oder nur aus einer krummen Fläche bestehen kann.

Zusatz: Die Oberfläche eines Körpers, dessen Gränzen lauter Ebenen sind, besteht wenigst aus vier ebenen Figuren (§. 225. II. Zus.).

§. 227.

Erklärung:

Ein Körper heißt **regulär**, wenn die ebenen Figuren, die ihn begränzen, alle regulär und congruent, und eben so alle körperliche Ecke congruent sind.

I. Zusatz: Reguläre Körper giebt es folgende fünf:

1. Das **Tetraedrum** (Fig. 161.) aus vier.
2. Das **Oktaedrum** (Fig. 162.) aus acht.

3. Das Ikosaedrum (Fig. 163.) aus 20 regulären und gleichen Dreyecken.

4. Das Hexaedrum oder Würfel (Fig. 164.) aus sechs gleichen Quadraten.

5. Das Dodekaedrum (Fig. 165.) aus 12 gleichen regulären Fünfecken.

II. Zusatz: Der Winkel eines regulären, oder gleichseitigen Dreyeckes hält 60° (§. 47. V. Zus.), mithin beträgt die Summe dreyer solcher Winkel, welche die Ecke vom Tetraedro einschließen, 180°; vier solche Winkel, welche die Ecke des Oktaedrums bilden, halten zusammen 240°; fünf solche Winkel, aus welchen eine Ecke des Ikosaedrums entsteht, sind 300° gleich: da nun sechs oder noch mehrere dergleichen Winkel 360° oder darüber ausmachen, so schließen sie keine körperliche Ecke ein (§. 224. Zus.), folglich giebt es außer den drey angeführten keinen andern regulären Körper, dessen Gränzen reguläre Dreyecke sind.

III. Zusatz: Von regulären Vierecken wird nur ein regulärer Körper, der Würfel, begränzt; denn der Winkel eines Quadrates ist = 90°, mithin alle drey Winkel, welche die Ecke des Würfels bilden, halten zusammen 270°; da nun vier solche Winkel schon 360° ausmachen, so können sie wieder keine körperliche Ecke einschließen.

IV. Zusatz: Von regulären Vielecken wird das einzige Dodekaedrum begränzt. Denn ein Winkel des regulären

lären Fünfeckes hält 108° (§. 56. II. Zuſ.), alſo drey ſolche Winkel, welche eine Ecke des Dodekaedrums ausmachen, halten zuſammen 324°; da nun vier ſolche Winkel, und bey allen übrigen Vielecken ſchon drey entweder 360°, oder noch mehr Grade ausmachen, ſo ſchließen ſie keine körperliche Ecke ein.

V. Zuſatz: Außer den im I. Zuſatze angezeigten, giebt es keine andere reguläre Körper.

§. 228.

Lehrſatz:

Körper, welche gleich viele ähnliche Seitenflächen, und congruente körperliche Winkel der Ordnung nach haben, ſind einander ähnlich.

Beweis:

Die Qualität eines geometriſchen Körpers iſt durch die Anzahl, Beſchaffenheit, nnd Lage der Seitenflächen beſtimmt; iſt alſo alles dieſes in beyden Körpern einerley, ſo haben ſie einerley Qualität, und ſind alſo einander ähnlich.

I. Zuſatz: In ähnlichen Körpern ſind Linien, die in ihnen auf ähnliche Art gezogen ſind, einander proportionirt. Denn das Verhältniß ſolcher Linien gehört zur Qualität, welche in ähnlichen Körpern einerley iſt.

II. Zuſatz: Körper von gleich viel congruenten Seitenflächen und Ecken paſſen ineinander, und ſind daher congruent.

§. 229.

Erklärungen:

a. Ein Körper AG (Fig. 166.), welcher zwischen zwey parallelen congruenten geradlinigten Figuren ABCD, EFGH, und so vielen Parallelogrammen als jede jener beyden Figuren Seiten hat, eingeschlossen ist, heißt ein **Prisma**.

b. Die beyden congruenten und parallelen geradlinigten Figuren heißen die **Grundflächen**, und die Parallelogramme die **Seitenflächen** des Prisma.

c. Ein Perpendikel HI (Fig. 167.) von einem Puncte der einen Grundfläche auf die andere heißt die **Höhe**, und jede Durchschnittslinie AE, DH u. s. f. zweyer Seitenflächen, eine **Kante** oder **Seite** des Prisma.

d. Prismen heißen **drey-, vier-** oder **vieleckicht**, nach der Anzahl der Ecke oder Seiten ihrer Grundflächen.

e. Prismen heißen endlich **senkrecht**, oder **schief**, je nachdem die Seitenflächen senkrecht, oder schief auf der Grundfläche stehen.

I. **Zusatz:** Im senkrechten Prisma steht jede Seite auf der Grundfläche senkrecht. Denn alle Seitenflächen sind auf der Grundfläche senkrecht, folglich auch die Seiten als ihre Durchschnittslinien (§. 171.).

II. **Zusatz:** Wenn eine Seite auf der Grundfläche senkrecht steht, so stehen alle übrigen Seiten auf solcher eben-

ebenfalls senkrecht (§. 165. II.); also auch alle Seitenflächen (§. 170. VI. Zus.), folglich ist das Prisma senkrecht.

III. Zusatz: Im senkrechten Prisma ist jede Seite zugleich die Höhe des Prisma (§. 172. V. Zus.).

§. 230.

Erklärungen:

a. Ein Körper (Fig. 168. u. 169.), welcher von zwey gleichen parallelen Kreisen, und einer solchen krummen Fläche begränzt ist, daß jede gerade Linie EB von der einen Kreislinie zur andern, die mit der geraden Linie FC zwischen den Mittelpuncten parallel gezogen wird, ganz in der krummen Fläche liegt, heißt ein **Cylinder**, oder **Walze**.

b. Die beyden Kreise heißen die **Grundflächen**, und die dritte krumme Fläche die **Seitenfläche** des Cylinders.

c. Die zwischen den beyden Mittelpuncten der Grundflächen gezogene gerade Linie FC heißt die **Axe**, und ihre parallele EB an der Seitenfläche die **Seite**, endlich die Perpendikularlinie EG (Fig. 169.) von einem Puncte der einen Grundfläche auf die andere die **Höhe** des Cylinders.

d. Steht die Axe auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Cylinder **senkrecht**, im Gegentheile **schief**.

I. Zu-

I. Zusatz: Im Cylinder ist jede Seite AD der Axe CF gleich, und beyde haben gegen die Grundfläche gleiche Neigungswinkel. Denn die Ebene ACF schneidet die beyden Grundflächen dergestalt (§. 172. II. u. IV. Zus.), daß DF ∥ AC ist, ferner ist AD ∥ CF (Erkl. c.) also auch AD = CF (§. 45. IV. Zus.), und diese beyde Linien machen mit der Grundfläche gleiche Neigungswinkel (§. 169. I. Zus.).

II. Zusatz: Alle Seiten eines Cylinders sind einander gleich, und haben gegen die Grundfläche einerley Neigung. Denn jede Seite ist der Axe gleich, und hat mit der Axe die nemliche Neigung gegen die Grundfläche (I. Zus.).

III. Zusatz: Im senkrechten Cylinder stehen alle Seiten desselben auf der Grundfläche senkrecht (§. 165. II.); und umgekehrt, wenn eine Seite senkrecht ist, so ist es auch die Axe, folglich selbst der Cylinder.

IV. Zusatz: Im senkrechten Cylinder ist die Höhe der Axe, oder einer Seite gleich.

§. 231.

Erklärungen:

a. Ein Körper (Fig. 170.), welcher von einer geradlinichten Figur, und so vielen Dreyecken, als erstere Seiten hat, begränzet ist, heißt eine **Pyramide.**

b. Die geradlinigte Figur nennt man die **Grundfläche**, die anliegenden Dreyecke die **Seitenflächen**, und den Punct, in welchen letztere zusammen treffen, die **Spitze** der Pyramide. c.

c. Der Perpendikel KM von der Spitze K auf die Grundfläche heißt die **Höhe**, und die Durchschnittslinien AK, BK u. s. f. der Seitenflächen die **Kanten**, oder **Seiten** der Pyramide.

d. Die Pyramide heißt **gleich-** oder **ungleichseitig**, je nachdem die Seiten der Pyramide einander gleich oder ungleich sind; endlich heißt eine Pyramide **dreyeckicht**, **viereckicht**, oder **vieleckicht**, je nachdem dessen Grundfläche ein Dreyeck, Viereck, oder Vieleck ist.

§. 232.

Erklärungen:

a. Ein Körper (Fig. 173.), welcher von einem Kreise und einer krummen Fläche begränzt wird, die durch den Umfang jenes Kreises geht, und sich in einem Puncte F so endet, daß jede gerade Linie FA, FD, FH u. s. w. aus diesem Puncte nach einem Puncte der Kreislinie ganz in dieser krummen Fläche liegt, heißt ein **Kegel** (Conus).

b. Die Kreisfläche heißt die **Grundfläche**, und die krumme Fläche die **Seitenfläche**, und der Punct F, in welchem sie sich endet, die **Spitze** des Kegels.

c. Eine gerade Linie FC von der Spitze nach dem Mittelpuncte des Kreises heißt die **Axe**; eine gerade Linie FA, FH u. s. f. von der Spitze nach der Peripherie der Grundfläche die **Seite**; und

ein

ein Perpendikel FC von eben dieser Spitze auf die Ebene der Grundfläche die Höhe des Kegels.

d. Ein Kegel heißt senkrecht oder schief, je nachdem seine Axe senkrecht oder schief auf der Grundfläche steht. Ein Kegel endlich, dessen Seiten gleich sind, heißt gleichseitig, im Gegentheile ungleichseitig.

I. Zusatz. Ein senkrechter Kegel (Fig. 173. Nr. 1.) ist gleichseitig. Denn man nehme an der Peripherie der Grundfläche zwey beliebige Puncte A, H, und ziehe die Linien oder Seiten FA, FH nebst den Radien CA, CH; so ist CA = CH; CF = CF; ACF = HCF = 90° (per hyp.), mithin △ ACF ≅ △ HCF, folglich FA = FH.

II. Zusatz: Der gleichseitige Kegel ist senkrecht. Denn man nehme nebst den beyden Puncten A, H noch einen dritten D, so daß AC, CD in einer geraden Linie liegen, so ist wieder △ACF ≅ △DCF ≅ △HCF (§. 28.), mithin der Winkel ACF = DCF = HCF = 90° (§. 11. c.), folglich steht FC auf der Grundfläche senkrecht (§. 163.).

III. Zusatz: Ein schiefer Kegel ist ungleichseitig, und und ein ungleichseitiger ist schief.

§. 233.

Erklärungen:

a. Ein Körper (Fig. 174.), dessen Oberfläche allenthalben von einem Puncte C gleich weit absteht, heißt eine Kugel (Sphaera, globus).

b.

b. Der Punct C heißt der **Mittelpunct**, und jede gerade Linie von diesem Puncte an die Oberfläche ein **Radius** der Kugel.

c. Eine gerade Linie zwischen zwey Puncten der Oberfläche heißt eine **Sehne**, und wenn sie durch den Mittelpunct der Kugel geht, ein **Durchmesser** derselben.

I. Zusatz: Alle Radien, und eben so alle Durchmesser der Kugel sind einander gleich.

II. Zusatz: Kugeln von gleichen Radien sind congruent.

Anmerkung. Körper mit andern krummen Flächen gehören in das Gebieth der höhern Mathematik, und obgleich alle Körper, deren Gränzen Ebenen, oder krumme Flächen sind, die sich durch Kreislinien darstellen lassen, zur Elementarmathematik gehören, so werden doch in selber die Untersuchungen fast allgemein auf das Prisma, den Cylinder, die Pyramide, den Kegel, und die Kugel eingeschränkt.

II. Hauptstück.

Von der Gleichheit, und den Verhältnissen der Körper.

I. Abschnitt.

Vom Prisma und dem Cylinder.

§. 234.

Aufgabe:

Aus der gegebenen Grundfläche ABCD (Fig. 166.) nebst einer Seite AE und ihrer Lage gegen die Grundfläche ein Prisma zu beschreiben.

Auflösung:

1. Man ziehe durch alle Ecke B, C, D der Grundfläche mit AE die Parallelen BF, CG, DH (§. 43.).
2. Durch E lege man zur Grundfläche eine Parallelebene (§. 174.), so ist
3. AG das verlangte Prisma.

Beweis:

Beweis:

4. Die Parallelebene Nr. 2. wird von allen Linien Nr. 1. durchschnitten (§. 172. III. Zus.), mithin bekömmt die Figur EG mit der Grundfläche gleich viel Seiten.

5. EF ∥ AB, FG ∥ BC, GH ∥ CD, HE ∥ DA (§. 172. II. Zus.), also

6. der Winkel E = A, F = B, G = C, H = D (§. 169.), und EF = AB, FG = BC, GH = CD, HE = DA (§. 45. IV. Zus.); folglich sind

7. die parallelen Figuren AD und EG einander congruent (§. 57.).

8. Da nun überdieß AF, BG, und so alle übrige Seitenflächen Parallelogramme sind Nr. 1. u. 5., so ist

9. AG das verlangte Prisma (§. 229.).

I. Zusatz: Durch die Grundfläche ABCD nebst einer Seite AE und ihrer Lage gegen die Grundfläche ist das Prisma AG vollkommen bestimmt. Denn dadurch sind beyde Grundflächen, alle Seitenflächen, und ihre Lage gegeneinander, mithin auch alle körperliche Ecke, folglich das ganze Prisma vollkommen bestimmt.

II. Zusatz: Wenn nebst der Grundfläche ABCD eine Seitenfläche ABFE nebst ihrer Lage gegen die Grundfläche bestimmt ist, so ist das Prisma AG selbst vollkommen bestimmt. Denn nebst der Grundfläche

ABCD

ABCD" ist durch Größe und Lage der Seitenfläche AF die Größe und Lage der Seite AE, mithin das Prisma selbst vollkommen bestimmt (I. Zus.).

III. Zusatz: Wenn zwey Prismen eine congruente Grund- und Seitenfläche, und überdieß einen gleichen Neigungswinkel dieser Ebenen haben, so sind sie congruent. Denn unter diesen Bedingungen sind beyde Prismen auf eine ganz gleiche Art vollkommen bestimmt (II. Zus.); mithin einander ähnlich und gleich, folglich congruent.

§. 235.

Lehrsatz:

Wenn ein Prisma AG (Fig. 166.) von einer Ebene zur Grundfläche parallel durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur IKLM mit der Grundfläche ABCD congruent.

Beweis:

1. Da die mit der Grundfläche parallel gelegte Ebene von allen Seitenflächen durchschnitten wird (§. 172. IV. Zus.), so bekommt die Durchschnittsfigur IKLM eine gleiche Anzahl Seiten mit der Grundfläche ABCD.

2. IK ∥ AB, KL ∥ BC, LM ∥ CD, MI ∥ DA (§. 172. II. Zus.), mithin

3. die Winkel I = A, K = B, L = C; M = D (§. 169.); ferner

4.

4. IK = AB, KL = BC, LM = CD, MI = DA (§. 45. IV. Zuſ.), folglich iſt

5. Die Durchſchnittsfigur KILM der Grundfläche ABCD congruent (§. 57.).

§. 236.

Lehrſatz:

Wenn man im Prisma AG (Fig. 167.) eine Seite AE in mehrere gleiche Theile AK, KO, OE theilet, und durch alle Theilungspuncte zur Grundfläche Parallelebenen legt, ſo wird das ganze Prisma in eben ſo viele congruente Prismen getheilet.

Beweis:

1. Die Durchſchnittsfiguren KM, QO ſind mit den Grundflächen AC, EG parallel (per hyp.), und congruent (§. 235.), mithin

2. AB ∥ KL ∥ OP ∥ EF, folglich ſind die Seitenflächen AL, KP, OF Parallelogramme (§. 51. VII. Zuſ.).

3. Auf die nemliche Art folgt, daß alle übrige Seitenflächen Parallelogramme, folglich AM, KQ, OG Prismen ſind (§. 229.).

4. Nun iſt AK = KO = OE (per hyp.), und EOP = OKL = KAB (§. 45. II.), mithin ſind die Seitenflächen AL, KP, OF congruent (§. 53. III. Zuſ.).

5. Da ferner die Seitenflächen zuſammen die Seitenfläche AF vom Prisma AG ausmachen, und

in ihr liegen, so haben sie alle zu ihren Grundflächen gleiche Neigungswinkel (§. 175.), folglich sind

6. die Prismen AM, KQ, OG congruent (§. 234. III. Zus.).

Zusatz: Wenn der Theil AK das Prisma AM giebt, so gehört zum Theile AO = 2AK das Prisma AQ = 2AM, ferner dem Theile AE = 3AK entspricht das Prisma AG = 3AM, und überhaupt, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, so entspricht dem Theile nAK das Prisma nAM.

§. 237.

Lehrsatz:

Wenn das Prisma AG (Fig. 167.) durch eine Ebene KM mit der Grundfläche AC parallel durchschnitten wird, so verhalten sich die beyden Prismen wie ihre Seiten, oder Höhen, das ist:

Prism. AM : Prism. AG = DN : DH
= SI : HI.

Beweis:

1. Wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, so ist für DH = nDN das Prisma AG = nAM (§. 236. Zus.), mithin allgemein:

Prism. AM : Prism. AG = DN : DH (§. 267. Arithm.).

2. Aus dem Puncte H der einen Grundfläche ziehe man auf die andere den Perpendikel HI (§. 166.), so durchschneidet die Ebene DHI auch die Ebene KM, und SN ∦ DI (§. 172. II. u. IV. Zus.), mithin

3.

3. DN : DH = SI : HS (§. 82. II.), folglich

4. Prism. AM : Prism. AG = SI : HS (§. 218. Arith.).

§. 238.

Lehrsatz:

Zwey Prismen von gleichen Höhen und Grundflächen sind gleich, das ist (Fig. 167.), wenn HI = hi, und ABCD = acd ist, so ist

Prism. AG = Prism. ag.

Beweis:

1. Man nehme SI = si von beliebiger Länge, und lege durch S, s mit der Grundfläche in beyden Prismen Parallelebenen, so ist

2. Prism. AG : prism. AM = HI : IS
   Prism. ag : prism. am = hi : is } §. 237.), mithin

   Prism. AG : prism. AM = Prism. ag : prism. am (§. 218. Arithm.).

3. Diese Proportion ist wahr, man mag SI = si so klein, als man will, mithin selbst Null setzen;

4. In diesem Falle aber verwandeln sich die Prismen AM, am in die Grundflächen ABCD, acd.

5. Sind nun diese Grundflächen gleich, so sind es auch Nr. 2. die Prismen AG, ag ((§. 210. III. Zus. Arithm.).

§. 239

Erklärungen:

a. Ein Prisma AG (Fig. 166.), deſſen Grundflächen Parallelogramme ſind, oder deſſen Oberfläche aus lauter Parallelogrammen beſteht, heißt ein **Parallelepipedum**, und zwar

b. ein recht- oder ſchief-winklichtes, je nachdem alle Parallelogramme lauter Rechtecke ſind, oder das Gegentheil Statt hat.

c. Das rechtwinklichte Parallelepipedum heißt ein **Cubus**, oder **Würfel**, wenn die Oberfläche aus lauter congruenten Quadraten beſteht.

I. Zuſatz: Durch eine Seite AB (Fig. 164.) iſt der Würfel vollkommen beſtimmt. Denn durch die Seite AB ſind die beyden Quadrate, nemlich die Grundfläche AC, und die Seitenfläche AF beſtimmt (§. 53. III. Zuſ.). Da nun EAB = 90° = EAD, ſo iſt auch die Lage der Seite EA nebſt ihrer Größe, mithin der Cubus ſelbſt vollkommen beſtimmt (§. 234. I. Zuſ.).

II. Zuſatz: Zwey Würfel, die eine Seite gleich haben, ſind congruent; denn durch eine Seite ſind beyde Würfel auf eine ganz gleiche und ähnliche Art beſtimmt (I. Zuſ.), folglich congruent.

§. 240.

Lehrſatz:

Durch die Grundfläche AB, Größe und Lage der Axe CF (Fig. 169.) iſt der Cylinder AE vollkommen beſtimmt.

Be-

Beweis:

Durch F ist die Lage (§. 174.), und durch die Grundfläche AB, die Größe des Kreises DE, mithin auch die Größe und Lage der krummen Seitenfläche, folglich der ganze Cylinder vollkommen bestimmt (§. 230.).

I. Zusatz: Cylinder von gleichen Grundflächen, wenn ihre Axen gleich sind, und gegen die Grundflächen einerley Neigung haben, sind congruent; denn alles ist in einem, wie im andern, vollkommen einerley.

II. Zusatz: Wenn sich das Rectangulum AF (Fig. 168.) um FC drehet, so entsteht der senkrechte Cylinder AE.

§. 241.

Lehrsatz:

Der Cylinder ist ein unendlicheckigtes Prisma.

Beweis:

1. Die beyden Grundflächen sind parallele congruente Kreise (§. 230. 2.), mithin auch parallele congruente reguläre Vielecke von unendlich viel Seiten oder Ecken (§. 126. II. Zus.).

2. Alle Seiten des Cylinders sind mit der Axe, also auch unter sich parallel (§. 165. Zus.), und gleich (§. 230. II. Zus.), mithin

3. besteht die krumme Seitenflächen aus unendlich vielen Parallelogrammen (§. 51. VII. Zus.); folglich ist

4. der Cylinder ein unendlichecktigtes Prisma (§. 229.).

I. Zusatz; Wenn der Cylinder (Fig. 168.) von einer Ebene mit der Grundfläche parallel durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur HI der Grundfläche AB congruent (§. 235.), folglich ein der Grundfläche gleicher Kreis.

II. Zusatz: Cylinder von gleichen Höhen und Grundflächen sind einander gleich (§. 238.).

II. Abschnitt.

Von der Pyramide und dem Kegel.

§. 242.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Grundfläche ABCD (Fig. 170.), und dem bestimmten Puncte K außer ihr eine Pyramide zu beschreiben.

Auflösung:

Man ziehe von K nach allen Ecken der Grundfläche gerade Linien, so bekömmt man so viele Dreyecke, als die Grundfläche Seiten hat; ferner stossen alle diese Dreyecke in einem Puncte K außer der Grundfläche zusammen, und schließen also mit solcher eine Pyramide ein (§. 231.).

§. 243.

§. 243.

Lehrsatz:

Wenn man die Pyramide mit einer Ebene zur Grundfläche ABCD (Fig. 170.) parallel durchschneidet, so ist die Durchschnittsfigur EFGH der Grundfläche ähnlich, und diese beyden Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze; das ist I. EFGH ∽ ABCD,

II. EFGH : ABCD = KN² : KM².

Beweis von I.

1. Die Parallelebene wird von der Ebene eines jeden Dreyeckes durchschnitten (§. 172. IV. Zus.). mithin bekömmt die Durchschnittsfigur EFGH mit der Grundfläche ABCD eine gleiche Anzahl Seiten, und

2. EF ∦ AB, FG ∦ BC, GH ∦ CD, HE ∦ DA (§. 172. II. Zus.), also sind die Winkel E, F, G, H den Winkeln A, B, C, D der Ordnung nach gleich (§. 169.).

3. Endlich ist $\left.\begin{matrix} EF : AB = KF : KB \\ FG : BC = KF : KB \end{matrix}\right\}$ (§. 83.),

also EF : AB = FG : BC.

4. Aus den nemlichen Gründen ist: FG : BC = GH : CD = HE : DA, also sind in beyden Figuren alle Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, einander proportionirt, folglich

5. EFGH ∽ ABCD (§. 91.).

Be-

Beweis von II.

6. $EFGH : ABCD = EF^2 : AB^2$ (§. 159.).

7. Nun fälle man aus der Spitze K auf die Grundfläche ABCD den Perpendikel KM (§. 166.), so schneidet die Ebene BKM die Durchschnittsebene in der geraden Linie FN (§. 172. IV. Zus.), und

8. $FN \parallel BM$ (§. 172. II. Zus.), mithin

9. $KN : KM = KF : KB$ (§. 82. I.)
$KF : KB = EF : AB$ (Nr. 3.), also
$EF : AB = KN : KM$ (§. 218. Arithm.)
$EF^2 : AB^2 = KN^2 : KM^2$ (§. 217. I. Arithm.),
folglich

10. $EFGH : ABCD = KN^2 : KM^2$ (Nr. 6.).

Zusatz: Die abgeschnittene Pyramide KEFGH ist der ganzen KABCD ähnlich (§. 228.).

§. 244.

Erklärungen:

a. Wenn die Pyramide mit einer zur Grundfläche ABCD (Fig. 179.) parallelen Ebene EFGH durchschnitten wird, so heißt der zwischen diesen beyden Parallelebenen enthaltene Theil der Pyramide eine abgekürzte Pyramide (pyramis decurtata).

b. Die beyden Parallelebenen EFGH, ABCD nennet man die Grundflächen, und die Entfernung der Grundflächen NM die Höhe der abgekürzten Pyramide.

I. Zu-

I. Zusatz: In der abgekürzten Pyramide sind die beyden Grundflächen EFGH, ABCD einander ähnlich (§. 243. I.).

II. Zusatz: Die abgekürzte Pyramide kömmt einem Prisma von der nemlichen Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner ihre Höhe ist. Denn $EFGH:ABCD = KN^2:KM^2$ (§. 243. II.); je kleiner nun die Höhe NM ist, desto näher kömmt KN der Linie KM, das ist, KN:KM, also $KN^2:KM^2$, folglich das Verhältniß EFGH:ABCD nähert sich immer mehr dem Verhältnisse der Gleichheit 1:1, und die beyden ähnlichen Grundfläche sind immer weniger an Größe unterschieden, die Trapezen oder Seitenflächen nähern sich Parallelogrammen, mithin die abgekürzte Pyramide einem Prisma von der nemlichen Grundfläche und Höhe (§. 229.).

III. Zusatz: Die abgekürzte Pyramide, dessen Höhe unendlich klein ist, verwandelt sich in ein Prisma von der nemlichen Höhe und Grundfläche. Denn die beyden Grundflächen sind congruent, die Seitenflächen Parallelogramme (II. Zus.), folglich der Körper ein Prisma (§. 229.).

§. 245.

Lehrsatz:

Pyramiden von gleichen Grundflächen ABCD, abc (Fig. 171.) und Höhen XZ, xz sind einander gleich.

1. Man stelle sich die beyden Höhen XZ, xz in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch alle Thei-

Theilungspuncte zur Grundfläche Parallelebenen vor, so bestehen

2. Beyde Pyramiden aus unendlich vielen abgekürzten Pyramiden (§. 244.), welche Prismen gleich sind (§. 244. III. Zus.).

3. Ferner ist

$$\left.\begin{array}{l} EFGH : ABCD = X\gamma^2 : XZ^2 \\ feg \;:\; abc = x\gamma^2 : xz^2 \end{array}\right\} \text{(§. 243. II.).}$$

4. Nun ist $XZ = xz$ (per hyp.), $X\gamma = x\gamma$ Nr. 1. also $XZ^2 = xz^2$; $X\gamma^2 = x\gamma^2$, mithin EFGH:ABCD = feg: abc (§. 218. Arithm.), und weil ABCD = abc (per hyp.), so ist auch EFGH = feg (§. 210. III. Zus. Arithm.).

5. Eben so ist IKLM = ikl; NOPQ = nop u. s. w. folglich

6. haben in beyden Pyramiden die kleinen Prismen (Nr. 2.) der Ordnung nach gleiche Grundflächen, und gleiche Höhen (Nr. 1.), und sind also gleich, das ist, prism. AG = prism. bg, prism. EL = prism. el u. s. f. (§. 238.).

7. Nun bestehen die beyden Pyramiden aus gleich viel solchen gleichen Prismen, folglich sind sie selbst einander gleich.

§. 246.

Lehrsatz:

Mehrere Pyramiden p, ϱ, π von dergleichen Höhe A, und den Grundflächen b, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{B}$ sind zusammen einer Pyra-

Pyramide P gleich, welche die nemliche Höhe A, und eine Grundfläche B hat, welche der Summe aller Grundflächen b, b, β gleich ist, oder für die gemeinschaftliche Höhe A, und B = b + b + β, ist P = p + p + π.

Beweis:

1. Man zerlege die Grundfläche B der Pyramide P in ihre Theile b, b, β (§. 157.).

2. Aus der Spitze der Pyramide ziehe man an alle Ecke dieser Theile gerade Linie; so wird

3. die Pyramide P in eben so viele Pyramiden getheilet, als die Grundfläche B Theile hat Nr. 1.

4. Diese Pyramiden haben eine gemeinschaftliche Spitze, folglich die gleiche Höhe A (§. 166. I. Zus.), ferner hat davon

5. die erste mit p, die andere mit p, die dritte mit π u. s. w. eine gleiche Grundfläche und Höhe, und sind also einander gleich (§. 245.), folglich sind

6. die erstere zusammen der Summe der letztern gleich, oder P = p + p + π.

§. 247.

Lehrsatz:

Die dreyeckigte Pyramide ABCE (Fig. 172.) ist der dritte Theil eines dreyeckigten Prisma AE von der nemlichen Grundfläche und Höhe; oder

Pyr. ABCE = ⅓ Prism. AE.

Be-

Beweis:

1. Man lege im Prisma AE durch AEF, und eben durch AEC Ebenen, so wird das Prisma
2. in drey Pyramiden ABCE; ACFE; DEFA getheilet, von welchen die erste und letzte mit dem Prisma die nemliche Grundfläche und Höhe haben.
3. Nimmt man in der ersten Pyramide das △ BCE, in der zweyten △ CFE als Grundflächen, so ist A ihre gemeinschaftliche Spitze, folglich haben sie gleiche Höhen (§. 166. I. Zus.), und gleiche Grundflächen (§. 51. V. Zus.), also
4. pyr. ABCE = pyr. ACFE (§. 245.).
5. Nimmt in der zweyten und dritten Pyramide die Dreyecke ACF, ADF als Grundflächen an, so wird E die gemeinschaftliche Spitze, folglich ist aus den nemlichen Gründen wie Nr. 3. u. 4.
6. pyr. ACFE = pyr. DEFA.
7. Nun ist Prism. AE = pyr. ABCE + pyr. ACFE + pyr. DEFA Nr. 2.
   = 3 pyr. ABCE (Nr. 4 u. 6.).
8. Folglich pyr. ABCE = $\frac{1}{3}$ Prism. AE.

Zusatz: Die Pyramide p ist überhaupt der dritte Theil eines jeden Prisma P, welches mit ihr eine gleiche Höhe A, und Grundfläche B hat, oder $p = \frac{1}{3} P$. Denn wenn p eine dreyeckigte Pyramide, und P ein dreyeckigtes Prisma von der Höhe A und Grundfläche B bezeichnen, so ist $\mathfrak{P} = P$ (§. 238.), $p = p$ (§. 245.), $p = \frac{1}{3} \mathfrak{P}$ (Lehrs.), folglich $p = \frac{1}{3} \mathfrak{P} = \frac{1}{3} P$.

§. 248.

§. 248.

Lehrsatz:

Durch die Grundfläche AHDA (Fig. 173.), die Axe FC, nebst ihrer Neigung gegen die Grundfläche, ist der Kegel vollkommen bestimmt.

Beweis:

1. Durch die Grundfläche, und durch die Lage und Größe der Axe ist die Spitze F, und durch F für jeden Punct H an der Peripherie der Grundfläche die gerade Linie FH (§. 6.), mithin die ganze krumme Seitenfläche, folglich der ganze Kegel (§. 232.) vollkommen bestimmt.

I. Zusatz: Kegel von gleichen Grundflächen, Axen, und Neigungswinkeln der Axe gegen die Grundfläche sind congruent. Denn in einem Kegel ist alles wie im andern auf gleiche Weise bestimmt.

II. Zusatz: Wenn sich das rechtwinklichte Dreyeck ACF (Fig. 173. I.) um den Catheten CF drehet, so entsteht ein senkrechter, oder gleichseitiger Kegel.

§. 249.

Lehrsatz:

Der Kegel ist eine unendlicheckigte Pyramide.

Beweis:

Die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis (§. 232.), also ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten (§. 126. II. Zus.), mithin besteht die krumme

Sei-

Seitenfläche desſelben aus unendlich vielen Dreyecken, die mit dem Kegel einerley Spitze haben, und deren Grundlinien zuſammen die Peripherie der Grundfläche des Kegels ausmachen, folglich iſt der Kegel eine Pyramide (§. 231.).

I. Zuſatz: Wenn man den Kegel zur Grundfläche parallel durchſchneidet, ſo iſt die Durchſchnittsfigur der Grundfläche ähnlich (§. 243. I.), folglich ein Kreis.

II. Zuſatz: Dieſer Kreis, oder dieſe mit der Grundfläche parallele Durchſchnittsfigur und die Grundfläche verhalten ſich gegeneinander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels (§. 243. II.).

III. Zuſatz: Zwey Kegel, oder auch ein Kegel und eine Pyramide von gleichen Grundflächen und Höhen ſind gleich (§. 245.).

IV. Zuſatz: Mehrere Kegel von gleicher Höhe ſind zuſammen einem einzigen von der nemlichen Höhe gleich, deſſen Grundfläche aber der Summe aller ihrer Grundflächen gleich iſt (§. 246.).

V. Zuſatz: Der Kegel iſt der dritte Theil eines Cylinders oder Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe (§. 247. Zuſ.).

§. 250.

Erklärungen:

a. Wenn ein Kegel (Fig. 173. Nr. I. u. II.) zur Grundfläche parallel durchſchnitten wird, ſo heißt der zwi-

zwischen den Parallelkreisen AHDA und EIKE enthaltene Theil desselben ein abgekürzter Kegel.

b. Die beyden Parallelkreise heißen die Grundflächen, die Entfernung dieser Grundflächen von einander die Höhe des abgekürzten Kegels.

I. Zusatz: Der abgekürzte Kegel ist eine abgekürzte Pyramide (§. 244.).

II. Zusatz: Der abgekürzte Kegel, dessen Höhe unendlich klein ist, verwandelt sich in einen Cylinder von der nemlichen Höhe und Grundfläche (§. 244. III. Zus.).

III. Abschnitt.

Von der Kugel.

§. 251.

Lehrsatz:

Um den Mittelpunct C (Fig. 174.) ist durch den Radius CE die Kugel vollkommen bestimmt.

Beweis:

Um den Mittelpunct C ist durch den Radius die Lage eines jeden Punctes der Oberfläche, mithin die ganze Kugel vollkommen bestimmt (§. 233.).

I. Zusatz: Wenn sich ein Halbkreis DBK (Fig. 176.) um den Durchmesser DK als Axe dräht, so entsteht eine Kugel.

II. Zusatz: Kugeln von gleichen Halbmessern congruiren; denn sie sind vollkommen auf einerley Art bestimmt.

§. 252.

Lehrsatz:

Wenn eine Kugel von einer Ebene durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur, oder der Kugelschnitt ein Kreis.

Beweis:

1. Wenn der Kugelschnitt KDEL (Fig. 175.) durch den Mittelpunct der Kugel geht, so stehen alle Puncte K, D, E u. s. w. seines Umfanges, da sie zugleich in der Oberfläche der Kugel liegen, von C um den Radius der Kugel, also gleich weit entfernt (§. 233.), mithin ist der Kugelschnitt in diesem Falle ein Kreis (§. 17.).

2. Liegt der Kugelschnitt AEFBA (Fig. 174.) außer dem Mittelpuncte C, so erreichte man aus C auf die Durchschnittsebene den Perpendikel CH (§. 166.).

3. Im Umfange des Kugelschnittes nehme man zwey beliebige Puncte E, F, so sind CE, CF als Radien der Kugel gleich (§. 233. I. Zus.), also

4. $\triangle CHE \cong \triangle CHF$ (§. 38. IX. Zus.), folglich $HE = HF$, das ist, im Umfange des Kugelschnittes stehen alle Puncte von H gleich weit ab, folglich ist der Kugelschnitt ein Kreis.

I. Zu-

I. Zusatz: Die Durchschnittsfigur, oder der Kugelkreis AEFBA (Fig. 174.) ist um so größer, je näher er dem Mittelpuncte C der Kugel liegt, und im Mittelpuncte ein **größter Kreis** der Kugel. Denn allemal ist $EH^2 = CE^2 - CH^2$ (§. 96. III. Zus.); da nun CE als Radius der Kugel für jeden Kugelkreis einerley Größe hat, so wird EH^2 um so größer, je kleiner CH^2 ist (§. 30. Nr. 4. Arithm.), mithin ist auch der Radius EH, folglich der Kugelkreis AEFBA um so größer, je kleiner dessen Entfernung CH vom Mittelpuncte der Kugel ist, und für $CH = 0$, oder im Mittelpuncte selbst am größten.

II. Zusatz: Ein Perpendikel CH vom Mittelpuncte der Kugel auf die Ebene eines kleinern Kugelkreises AEFBA geht durch dessen Mittelpunct H; denn HE = HF, das ist, dieser Perpendikel geht durch einen Punct H, welcher von allen Puncten der Peripherie gleich weit absteht (Lehrs.), mithin durch den Mittelpunct dieses Kugelkreises.

III. Zusatz: Wenn man durch den Mittelpunct H eines Kugelkreises einen Perpendikel HC errichtet (§. 167.), so geht solcher durch den Mittelpunct der Kugel C. Denn sonst könnte man vom Mittelpuncte C der Kugel auf die Ebene des kleinern Kugelkreises ein Loth fällen (§. 166.), dieses würde durch des Kreises Mittelpunct H gehen (II. Zus.), folglich würden durch H auf die Kreisebene zwey verschiedene Perpendikel möglich seyn, gegen (§. 167. Zus.).

IV. Zusatz: Eine gerade Linie CH zwischen dem Mittelpuncte C der Kugel, und dem Mittelpuncte H eines kleinern Kugelkreises steht auf die letztere Kreisebene senkrecht. Denn ein Perpendikel aus C auf die Kreisebene geht durch dessen Mittelpunct H. (II. Zus.), und zwischen zwey Puncten ist nur eine gerade Linie möglich (§. 6. a.).

§. 253.

Erklärungen:

a. Zwey Puncte P, Q an der Oberfläche der Kugel (Fig. 174.), deren jeder von allen Puncten der Peripherie eines Kugelkreises AEFBA gleich weit absteht, heißen die Pole dieses Kugelkreises, und

b. die gerade Linie zwischen den Polen oder PQ die Axe desselben.

I. Zusatz: Wenn man auf der Ebene eines Kugelkreises AEFBA durch ihren Mittelpunct H einen Perpendikel errichtet (§. 167.), solchen bis an die Oberfläche der Kugel verlängert, so sind P, Q die Pole dieses Kugelkreises. Denn man ziehe von P, Q nach zwey beliebigen Puncten E, F der Peripherie des Kugelkreises gerade Linien PE, PF, QE, QF, so ist EH = HF und EHP = FHP = 90°. (per hyp.) PH = PH, also △ PHE ≅ △ PHF (§. 24.), folglich PE = PF, mithin steht P von allen Puncten der Peripherie des Kugelkreises gleich weit ab, ist also ein Pol desselben. Eben so ist QE = QF, mithin Q der andere Pol dieses Kreises.

II. Zu-

II. Zusatz: Wenn P, Q die Pole des Kugelkreises AEFBA sind, so steht die Axe PQ auf der Kreisebene senkrecht, und geht durch den Mittelpunct des Kugelkreises. Denn PE=PF, QE=QF (per hyp.) PQ=PQ, also △PEQ≅△PFQ (§. 28.), mithin der Winkel EPH=FPH; PH=PH, PE=PF, also △EPH≅△FPH, folglich EH=FH, das ist, die Axe geht durch den Mittelpunct des Kugelkreises, und da nun auch PHE=PHF=PHB=PHA=90° (§. 11. c.); so steht PQ auf der Kreisebene senkrecht (§. 162.).

III. Zusatz: In der Axe PQ eines Kugelkreises AEFBA liegt der Mittelpunct C der Kugel. Denn die Axe steht durch den Mittelpunct H des Kugelkreises auf dessen Ebene senkrecht (II. Zus.), folglich geht sie durch den Mittelpunct der Kugel (§. 252. III. Zus.).

IV. Zusatz: Wenn man die gerade Linie HC zwischen dem Mittelpuncte des Kugelkreises, und der Kugel bis an die Oberfläche der letzten verlängert, so sind P, Q die Pole des Kugelkreises. Denn HC steht auf der Ebene des Kugelkreises senkrecht (§. 252. IV. Zus.), folglich liegen in ihrer Verlängerung die Pole (I. Zus.).

V. Zusatz: Zwey Kugelkreise MGHN, KDEL (Fig. 175.), die einerley Pole P, Q haben, sind Parallelkreise. Denn PQ steht auf beyden Kreisebenen senkrecht (II. Zus.), folglich sind sie Parallelkreise (§. 172. I. Zus.).

VI. Zusatz: Zwey Parallelkreise MGHN, RTVS haben einerley Pole P, Q. Denn wenn P, Q die Pole

vom Parallelkreise MGHNM sind, so steht PQ durch den Mittelpunct F dieses Kreises auf ihm senkrecht (II. Zus.), geht durch den Mittelpunct C der Kugel (III. Zus.), steht auf der Ebene des andern Parallelkreises RTVSR senkrecht (§. 173.), geht durch den Mittelpunct eben dieses Kreises (§. 252. II. Zus.), folglich sind P, Q zugleich die Pole dieses Parallelkreises (I. Zus.).

§. 254.

Erklärung:

Eine Ebene MN (Fig. 174.), welche mit der Oberfläche einer Kugel nur einen Punct Q gemein hat, sonst ganz außer ihr liegt, heißt eine **Berührungsebene der Kugel.**

I. Zusatz: Eine Ebene MN, welche einen Punct Q mit der Oberfläche der Kugel so gemein hat, daß durch diesen Punct der Radius CQ auf ihr senkrecht steht, ist eine Berührungsebene der Kugel. Denn man nehme in dieser Ebene einen andern beliebigen Punct G, so ist $CG > CQ$ (§. 166 II. Zus.), mithin liegt solcher außerhalb der Kugel.

II. Zusatz: Wenn man vom Mittelpuncte C der Kugel auf die Berührungsebene MN an den Berührungspunct Q eine gerade Linie, das ist, einen Radius zieht, so steht er auf dieser Ebene senkrecht. Denn sonst konnte man von C auf die Ebene ein anderes Loth CG ziehen (§. 166.), so daß $CG < CQ$ seyn würde (§. 166. II. Zus.), mithin würde G innerhalb

halb der Kugel liegen, folglich MN keine Berührungsebene gegen die Annahme seyn.

III. Zusatz: Durch einen Punct Q der Kugeloberfläche giebt es nur eine Berührungsebene MN. Denn gäbe es noch eine andere, so müßte CQ auf ihr ebenfalls senkrecht stehen (II. Zus.), welches aber unmöglich ist (§. 162. II. Zus.).

IV. Zusatz: Wenn man durch den Berührungspunct Q der Berührungsebene MN einen Perpendikel QC errichtet, so geht er durch den Mittelpunct C der Kugel. Denn sonst könnte man von C nach dem Berührungspuncte Q eine gerade Linie ziehen, welche auf der Berührungsebene MN durch Q senkrecht stünde (II. Zus.), durch einen Punct Q giebt es aber auf die Berührungsebene MN nur ein Loth (§. 167. Zus.).

§. 255.

Lehrsatz:

Die gerade Linie AB (Fig. 174.) kann die Oberfläche der Kugel nur in zwey Puncten A, B schneiden.

Beweis:

1. Man lege durch A, B und der Kugel Mittelpunct C eine Ebene (§. 161.), so ist der Kugelschnitt APBQA ein größter Kugelkreis (§. 252. I. Zus.), das ist, alle Puncte, welche die Ebene mit der Kugel Oberfläche gemein hat, bilden die Peripherie eines größten Kugelkreises.

2. In

2. In dieſer Kreisebene liegen aber auch alle Puncte der geraden Linie AB (§. 161.).

3. Würde alſo dieſe gerade Linie die Oberfläche der Kugel außer A, B noch in einem dritten Puncte durchſchneiden, ſo müßte ſie obige Kreislinie (Nr. 1.) in drey Puncten durchſchneiden, welches unmöglich iſt (§. 59.).

I. Zuſatz: Die Peripherien APBQA, AEFBA zweyer Kugelkreiſe können einander nur in zwey Puncten A, B durchſchneiden. Denn die beyden Kreisebenen durchſchneiden einander in der geraden Linie AB (§. 161. II. Zuſ.); würden nun die Peripherien beyder Kreiſe, deren Puncte alle in der Oberfläche der Kugel liegen, außer A, B noch einen dritten Punct gemein haben, ſo müßte ſolcher in der Durchſchnittslinie AB liegen, letztere alſo die Oberfläche der Kugel in drey Puncten durchſchneiden gegen den Lehrſatz.

II. Zuſatz: Größte Kugelkreiſe KDELK, KPLQK (Fig. 175.) halbiren einander. Denn der Kugel-Mittelpunct C iſt beyden Kreiſen gemein (§. 252. I. Zuſ.), liegt alſo in der gemeinſchaftlichen Durchſchnittslinie KL, welche ein Diameter für beyde Kreiſe iſt, und ſie beyde halbirt ((§. 17. IV. Zuſ.).

III. Zuſatz: Kugelkreiſe KDELK, KPLQK, welche einander halbiren, ſind größte Kreiſe. Denn wenn die Kreiſe einander halbiren, ſo muß ihre Durchſchnittslinie KL ein gemeinſchaftlicher Diameter, und C der Mittelpunct beyder Kreiſe ſeyn; C iſt aber zugleich

gleich der Mittelpunct der Kugel; denn sonst könnte man vom letztern nach C eine gerade Linie ziehen, welche auf beyden Kreisebenen senkrecht seyn würde (§. 252. IV. Zus.), gegen (§. 162. I. Zus.). folglich liegt der Mittelpunct der Kugel in beyden Kreisen, und sie sind daher grösste Kugelkreise (§. 252. I. Zus.).

§. 256.

Erklärung:

Der Theil der Kugel, welcher (Fig. 175.) zwischen zwey grösten Halbkreisen PGDQ, PHEQ enthalten ist, heißt ein **keilförmiger Ausschnitt** der Kugel.

I. Zusatz: Die Grösse eines keilförmigen Ausschnittes ist für eine gegebene Kugel durch den Neigungswinkel der beyden grösten Halbkreise, zwischen welchen er enthalten ist, bestimmt.

II. Zusatz: Keilförmige Ausschnitte einer Kugel, deren Halbkreise gleiche Neigungswinkel machen, sind congruent.

III. Zusatz: Ein grösster Kreis KDELOA theilet die Kugel in zwey gleiche Theile. Denn der obere Theil KPL der Kugel sowohl, als der untere Theil derselben KQL, sind keilförmige Ausschnitte der beyden grösten Halbkreise KDEL, KOL, welche auf beyden Seiten einen Neigungswinkel von 180° machen.

IV. Zusatz: Wenn sich (Fig. 176.) der Quadrant ADB um den Radius AD als Axe dreht, so beschreibt er eine Halbkugel. Denn der Halbkreis DBK beschreibt

eine

eine Kugel (§. 251. I. Zus.), und der Radius AB einen größten Kreis derselben (§. 252. I. Zus.), folglich ist der über diesen Kreis befindliche Theil der Kugel, welcher vom Quadranten ADB beschrieben wird, eine Halbkugel (III. Zus.).

V. Zusatz: Der unendlich kleine Bogen Dd beschreibt beym Umdrehen einen unendlich kleinen Theil von der Oberfläche der Kugel: so wie nun der Bogen Dd von seiner Sehne, das ist, von einer geraden Linie nicht mehr unterschieden ist (§. 126.), so ist auch dieser unendlich kleine Theil von der Oberfläche der Kugel von einer Ebene nicht unterschieden.

VI. Zusatz: Eine Ebene läßt sich als ein Stück von der Oberfläche der Kugel, deren Halbmesser unendlich ist, betrachten. Denn wenn sich der erste Winkel DAB um AD dreht, so beschreibt AB eine Ebene (§. 164.) nun kann diese gerade Linie AB als ein Bogen eines Kreises, dessen Radius unendlich ist (§. 110. IV. Zus.), folglich die beym Umdrehen erzeugte Ebene als ein Stück der Oberfläche der Kugel mit eben diesem unendlichen Halbmesser betrachtet werden.

§. 257.

Lehrsatz:

Die Kugel ist einer Pyramide gleich, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche, und ihren Halbmesser zur Höhe hat.

Beweis:

Beweis:

1. Man stelle sich die Oberfläche der Kugel in unendlich kleine Theile getheilt, und von allen Ecken dieser Theilchen nach dem Mittelpuncte der Kugel gerade Linien oder Radien vor, so ist

2. jedes solches Theilchen eine Ebene (§. 256. V. Zus.), und kann als Grundfläche einer Pyramide, welche ihre Spitze im Mittelpuncte der Kugel, folglich den Radius zur Höhe hat, betrachtet werden.

3. Alle diese Grundflächen machen zusammen die Oberfläche der Kugel, und die Pyramiden die Kugel aus, folglich ist

4. die Kugel einer Pyramide gleich, welche die Oberfläche derselben zur Grundfläche, und den Radius zur Höhe hat (§. 246.).

III. Hauptstück.

Von Ausmessung der Körper, und ihrer Oberflächen.

I. Abschnitt.

Vom Prisma und dem Cylinder.

§. 258.

Lehrsatz:

Wenn eine Seite ab des Würfels ag (Fig. 177.) zu den Seiten des senkrechten Parallelepipedums AG so ein Verhältniß hat, daß ab in der Länge AB, m mal, in der Breite BC, n mal, und in der Höhe AE, p mal enthalten ist, und m, n, p lauter ganze Zahlen sind, so ist der Würfel ab im senkrechten Parallelep. AG so oft enthalten, als die Zahl 1 im Producte mnp, oder das Parallelep. AG ist mnp mal größer, als der Würfel ag.

Beweis:

1. Wenn ab in der Seite AB, m mal enthalten ist, so läßt sich der Würfel ag längst AB, m mal im senk-

senkrechten Parallelep. AG neben einander legen, also ist parallelep. $A\beta = m$ cub. ag.

2. Dieses senkrechte Parallelep. $A\beta$ läßt sich im gegebenen AG auf der Grundfläche AC so oft nebeneinander anlegen, als die Seite ab in BC enthalten ist, also n mal, mithin ist

parallelep. $A\gamma = n$ parallelep. $A\beta$
$= m\,n$ cub. ag (Nr. 1.).

3. Das senkrechte Parallelep. $A\gamma$ läßt sich endlich im gegebenen AG so oft auf einander setzen, als ihre Seite $A\alpha$, oder die Seite ab des Würfels ag in der Höhe AE enthalten ist, folglich p mal, das ist:

Parallelep. AG $= p$. parallelep. $A\gamma$
$= m\,n\,p$ cub. ag (Nr. 2.), und
cub. ag : Parallelep. AG $= 1 : m\,n\,p$.

Beyspiel: Wenn $m = 4$, $n = 5$, $p = 3$, so ist
Parallelep. AG $= 4.5.3$ cub. ag $= 60$ cub. ag, oder
cub. ag : Parallelep. AG $= 1 : 60$.

Zusatz: Für jedes senkrechte Parallelepipedum läßt sich ein Cubus angeben, dessen Seite das gemeinschaftliche Maaß für die drey Seiten, nemliche Länge, Breite und Höhe des erstern ist, mithin m, n, p ganze Zahlen sind. Denn wenn die Seite ab des Würfels ag nicht das gemeinschaftliche Maaß der drey Seiten AB, BC, AE ist, so nehme man einen aliquoten Theil von ab, verzeichne aus selben einen

Cubus

Cubus (§. 239. I. Zuſ.), und unterſuche, ob nicht dieſer aliquote Theil das gemeine Maaß für AB, BC, AE iſt; findet wieder das Gegentheil Statt, ſo kann man immer kleinere aliquote Theile von ab nehmen, bis man endlich auf einen ſolchen kömmt, der alle drey Seiten des Parallelepipedums ſo genau mißt, daß der bleibende Reſt in keinen Betracht mehr kömmt (§. 197. III. Zuſ. Arithm.), verzeichnet man aus ſelben einen Cubus, ſo mißt deſſen Seite jene des Parallelepipedums, und m, n, p werden ganze Zahlen.

§. 259.

Erklärung:

Als Maaße der Körper (§. 1. d. Arithm.) nimmt man Würfel, deren Seite entweder einen Schuh, oder einen Zoll, oder eine Linie, oder aber bey Vermeſſung größerer Körper eine Ruthe hält, und welche deßhalb **Cubikſchuhe, Cubikzolle, Cubiklinien, Cubikruthen** heißen.

I. Zuſatz: Nach der Decimaleintheilung (§. 80.) hält die Cubikruthe 1000 Cubikſchuhe, dieſer 1000 Cubikzolle, und letzterer 1000 Cubiklinien. Denn da die Seite des Cubikfußes in jeder der drey Seiten von der Cubikruthe 10mal enthalten iſt, ſo iſt die Cubikruthe = 1000 Cubikfuß (§. 258.), auf die nemliche Weiſe gilt dieſes für die Cubikzolle, und Cubiklinien.

II. Zuſatz: Einen Körper meſſen heißt angeben, wie viel Cubikruthen, oder Cubikfuß u. ſ. w. ſolcher enthält.

III. Zu-

III. Zusatz: Das senkrechte Parallelepipedum wird ausgemessen, wenn man mit einerley Längenmaaße dessen Länge, Breite und Höhe mißt, und das Product dieser drey Zahlen nimmt (§. 258.), oder wie man sich der Kürze wegen gewöhnlich ausdrückt, wenn man die Länge, Breite, und Höhe miteinander multiplicirt, oder endlich, weil das Product der Länge und Breite den Inhalt der Grundfläche bestimmt (§. 148. VI. Zus.), wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.

IV. Zusatz: Den körperlichen Inhalt eines Cubus erhält man, wenn man eine Seite mißt, und die Zahl, welche ihre Länge angiebt, zum Cubus erhebt, das ist, wenn a die Länge einer Seite des Würfels C in Zahlen ausdrückt, so ist $C = a^3$.

V. Zusatz: Wenn a die Länge einer Seite eines Cubus, und x jene des doppelt so großen Cubus in Zahlen bezeichnet, so ist $x^3 = 2a^3$, mithin $x = a\sqrt[3]{2}$ (§. 96. Zus. Arithm.), folglich läßt sich x finden, das ist, ein gegebener Cubus, dessen Seite $= a$ ist, verdoppeln.

§. 260.

Aufgabe:

Ein Prisma oder einen Cylinder zu messen.

Auflösung:

Man suche nach der Anweisung der Planimetrie den Inhalt der Grundfläche, und multiplicire solchen mit

Be-

der Höhe, so giebt das Product den körperlichen Inhalt des Prisma, oder Cylinders.

Beweis:

1. Die Grundfläche des Prisma läßt sich vollkommen, und jene des Cylinders durch Annäherung quadriren (§. 149. I. u. II. Zus), mithin giebt
2. das Product dieser Grundfläche in die Höhe den körperlichen Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums (§. 259. III. Zus.), welches mit dem gegebenen Prisma, oder Cylinder gleiche Grundfläche und Höhe hat, also ihnen gleich ist (§. 238. und 241. II. Zus.), folglich giebt
3. dieses Product auch den körperlichen Inhalt des Prisma und Cylinders an.

I. Zusatz: Wenn man den körperlichen Inhalt eines Prisma, oder Cylinders durch die Höhe dividirt, so bekömmt man die Größe ihrer Grundflächen; theilet man hingegen ersteren durch die Grundfläche, so bekömmt man die Höhe derselben.

II. Zusatz: Prismen sowohl, als Cylinder stehen zu einander im zusammen gesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen. Denn wenn P, p den den körperlichen Inhalt zweyer Prismen, oder Cylinder; A, b ihre Grundflächen, A, a die Höhen bezeichnen, so ist $P = B.A$; $p = b.a$ (Aufg.), folglich

$$P : p = B.A : b.a.$$

III. Zu-

III. Zuſatz: Prismen und Cylinder verhalten ſich bey gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, und bey gleichen Höhen wie ihre Grundflächen. Denn

$$P : p = B.A : b.a \text{ (II. Zuſ.)}$$
$$= A : a, \text{ wenn } B = b$$
$$= B : b, \text{ wenn } A = a \Big\} \text{ (§. 216. Arithm.).}$$

IV. Zuſatz: Zwey Cylinder C, c von gleichen Höhen verhalten ſich zu einander, wie die Quadrate der Durch- oder Halbmeſſer ihrer Grundflächen. Denn wenn D, d die Durchmeſſer, und R, r die Halbmeſſer bezeichnen, ſo iſt $B = \frac{D^2\pi}{4} = R^2\pi$; $b = \frac{d^2\pi}{4} = r^2\pi$ ((§. 151. II. Zuſ.), alſo

$$C : c = \frac{D^2\pi}{4} : \frac{d^2\pi}{4} = R^2\pi : r^2\pi \text{ (III. Zuſ.)}$$
$$= D^2 : d^2 = R^2 : r^2 \text{ (§. 216. Arithm.).}$$

V. Zuſatz: In gleichen Prismen und Cylindern ſind die Grundflächen mit den Höhen in umgekehrten Verhältniſſen. Denn wenn B.A = b.a, ſo iſt B : b = a : A (§. 210. VI. Zuſ. Arithm.).

VI. Zuſatz: Wenn über beyde Kreiſe (Fig. 77.) zwey Cylinder von gleicher Höhe A ſtehen, ſo iſt der äußere oder größere davon $C = R^2\pi . A$, und der innere oder kleinere $c = r^2\pi . A$, folglich iſt der körperliche Inhalt für den cylindriſchen Ring, oder $C - c = A\pi (R^2 - r^2)$.

§. 261.

§. 261.

Aufgabe:

Die Oberfläche eines Prisma zu finden.

Auflösung:

Da die beyden Grundflächen sowohl, als die Seitenflächen geradlinigte ebene Figuren sind (§. 229.), so berechne man nach der Anleitung der Planimetrie jede dieser Figuren, nehme ihre Summe, welche den Inhalt der ganzen Oberfläche angiebt (§. 226.).

Zusatz: Wenn a die Länge einer Seite des Würfels angiebt, so bestimmt $6a^2$ den Inhalt seiner Oberfläche (§. 227. I. Zus. Nr. 4.).

§. 262.

Lehrsatz:

Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Cylinders ist einem Rechtecke gleich, welches die Peripherie der Grundfläche zu einer, und die Höhe des Cylinders zur andern Seite hat.

Beweis:

1. Die krumme Seitenfläche des senkrechten Cylinders besteht aus unendlich vielen Rechtecken (§. 241.), welche

2. eine Seite, oder die Höhe des Cylinders (§. 230. IV. Zus.) zu ihrer gemeinschaftlichen Höhe, und

3. deren Grundlinien zusammen die ganze Peripherie von der Grundfläche des Cylinders ausmachen, folglich sind diese Rechtecke zusammen, oder 4.

4. die ganze krumme Seitenfläche einem Rechtecke gleich, welches die Summe ihrer Grundlinien, oder die Peripherie der Grundfläche zur Grundlinie, und ihre gemeinschaftliche Höhe, oder jene des Cylinders zur Höhe hat (§. 135.).

Zusatz: Wenn D den Durchmesser, R den Halbmesser der Grundfläche, und A die Höhe oder Seite des senkrechten Cylinders bezeichnen, so ist die krumme Seitenfläche desselben $= D\pi A = 2R\pi A$ (§. 128.).

§. 263.

Aufgabe:

Die Oberfläche eines senkrechten Cylinders zu finden.

Auflösung:

1. Man suche die beyden Grundflächen nach (§. 151. II. Zus.),
2. die krumme Seitenfläche nach (§. 262.),
3. ihre Summe giebt die Oberfläche des Cylinders.

Zusatz: Wenn wieder R den Radius, D den Diameter der Grundfläche, und A die Höhe eines senkrechten Cylinders bezeichnen, so ist dessen Oberfläche $= D\pi(\frac{1}{2}D + A) = 2R\pi(R + A)$.

II. Abschnitt.

Von der Pyramide und dem Kegel.

§. 264.

Aufgabe:

Eine Pyramide, oder einen Kegel zu messen.

Auflösung:

Man suche den Inhalt der Grundfläche, multiplicire solchen mit der Höhe, und dividire das Product mit der Zahl 3.

Beweis:

1. Das Product der Grundfläche in die Höhe giebt den körperlichen Inhalt eines Prisma, oder Cylinders von der nemlichen Grundfläche und Höhe (§. 260.),
2. die Pyramide (§. 247. Zus.), und der Kegel (§. 249. V. Zus.) sind der dritte Theil eines solchen Prisma oder Cylinders, folglich giebt
3. der dritte Theil vom obigen Producte den körperlichen Inhalt der Pyramide oder des Kegels.

I. Zusatz: Wenn man den Inhalt der Pyramide, oder des Kegels mit der Grundfläche dividirt, so bekömmt man den dritten Theil der Höhe, und wenn man erstern durch den dritten Theil der Höhe dividirt, so bekömmt man die Grundfläche zum Quotienten.

II. Zusatz: Pyramiden und Kegel stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen, und verhalten sich bey gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, und bey gleichen Höhen wie ihre Grundflächen; ferner stehen die Grundflächen gleicher Pyramiden oder Kegel zu ihren Höhen im umgekehrten geometrischen Verhältnisse. Denn ihr Inhalt ist der dritte Theil vom Prisma, oder Cylinder, also $= \frac{1}{3}B.A$, folglich gelten auch von ihnen alle diese Verhältnisse (§. 260. II, III, V. Zus.).

III. Zusatz: Zwey Kegel von gleicher Höhe verhalten sich wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser ihrer Grundflächen (§. 260. IV. Zus.).

§. 265.

Aufgabe:
Die Oberfläche einer Pyramide zu finden.

Auflösung:

1. Da die Grundfläche eine geradlinigte ebene Figur, und alle Seitenflächen Dreyecke sind (§. 231.), so bestimme man
2. den Inhalt einer jeden einzelnen Figur nach den Vorschriften der Planimetrie.
3. Die Summe aller dieser Flächen giebt den Inhalt der ganzen Oberfläche.

§. 266.

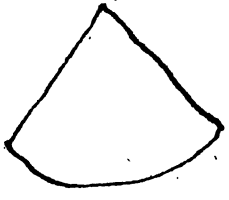
Lehrsatz:
Die krumme Seitenfläche eines gleichseitigen Kegels ist so groß, als ein Dreyeck, welches zur Grundlinie

die Peripherie der Grundfläche, und zur Höhe die Seite des Kegels hat.

Beweis:

1. Die krumme Seitenfläche eines Kegels besteht aus unendlich vielen Dreyecken (§. 249.), welche,
2. wenn der Kegel gleichseitig ist, die Seite desselben zur gemeinschaftlichen Höhe, und
3. deren Grundlinien zusammen die Peripherie der Grundfläche ausmachen, folglich sind sie
4. zusammen, oder die ganze krumme Seitenfläche, einem Dreyecke gleich, welches die Seite des Kegels zur Höhe, und die Peripherie der Grundfläche zur Grundlinie hat (§. 138. II. Zus.).

I. Zusatz. Da im gleichseitigen Kegel alle Puncte der Peripherie der Grundfläche von der Spitze des Kegels gleich weit abstehen, so ist die krumme Seitenfläche desselben ein Ausschnitt eines Kreises, dessen Radius der Seite des Kegels, und dessen Bogen der Peripherie seiner Fläche gleich ist (§. 63. u. §. 151. IV. Zus.).



II. Zusatz: Wenn l die Seite des gleichseitigen Kegels, d den Durchmesser, und r den Halbmesser seiner Grundfläche bezeichnen, so ist die krumme Seitenfläche $d\pi.\frac{1}{2}l = r\pi.l$.

§. 267.

Aufgabe:

Die Oberfläche des gleichseitigen Kegels zu finden.

Auflö-

Auflösung:

Man suche den Inhalt der Grundfläche nach (§. 151. II. Zus.), und jenen der krummen Seitenfläche nach (§. 266.), die Summe derselben giebt die gesuchte Oberfläche des gleichseitigen Kegels (§. 232.).

Zusatz: Bezeichnen d den Durchmesser, r den Radius der Grundfläche, und l die Seite des gleichseitigen oder senkrechten Kegels, so ist die ganze Oberfläche desselben $= r\pi\,(r+l) = \frac{1}{2}d\pi\,(\frac{1}{2}d+l)$.

§. 268.

Aufgabe:

Aus den gegebenen beyden Grundflächen ABCD, EFGH (Fig. 170.), und ihrer Entfernung NM den körperlichen Inhalt der abgekürzten Pyramide zu finden.

Auflösung:

1. Der Kürze wegen setze man die untere Grundfläche ABCD $= B$, die obere EFGH $= b$, ihre Entfernung NM $= \alpha$, die Höhe der ganzen Pyramide KM $= A$, die Höhe der obern kleinen abgeschnittenen Pyramide KN $= a$, so ist
2. Pyr. decurt. $= \frac{1}{3}BA - \frac{1}{3}ba$ (§. 264.),
3. Ferner ist $b : B = a^2 : A^2$ (§. 243. II.), mithin
4. $\frac{a^2}{A^2} = \frac{b}{B}$; $b = \frac{a^2}{A^2}B$; $a = A\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$, also

5.

5. Pyr. decurt. $= \frac{1}{3}BA - \frac{1}{3}\frac{a^2}{A^2}Ba$ (Nr. 2. u. 4.).

$= \frac{1}{3}B\left(A - \frac{a^2}{A^2}a\right)$.

6. $A = a + \alpha = A\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} + \alpha$ (Nr. 4.) $= \frac{A\sqrt{b}}{\sqrt{B}} + \frac{\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B}}$

also $A\sqrt{B} - A\sqrt{b} = \alpha\sqrt{B}$,

und $A = \frac{\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$, mithin

7. $a = \frac{\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$ (Nr. 4.) $= \frac{\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$,

folglich

8. $A - \frac{a^2}{A^2}a$ (Nr. 5.) $= \frac{\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} - \frac{b}{B} \cdot \frac{\alpha\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$

(Nr. 4. u. 7.)

$= \frac{\alpha B\sqrt{B} - \alpha b\sqrt{b}}{B(\sqrt{B} - \sqrt{b})} = \frac{\alpha}{B} \cdot \frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$

$= \frac{\alpha}{B} \cdot \frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{B} + \sqrt{b}}{\sqrt{B} + \sqrt{b}}$ (§. 74. VII. Zuf. Arithm.)

$= \frac{\alpha}{B} \cdot \frac{B^2 - b\sqrt{Bb} + B\sqrt{Bb} - b^2}{B - b}$

$= \frac{\alpha}{B} \cdot \frac{(B+b)(B-b) + (B-b)\sqrt{Bb}}{B-b}$ (§. 103. Zuf. Arithm.)

$= \frac{\alpha}{B}(B + b + \sqrt{Bb})$; folglich wird

9.

9. Pyr. decurt. $= \frac{1}{3}B \cdot \frac{\alpha}{B} (B + b + \sqrt{Bb})$ (Nr. 5.)

$= \frac{1}{3}\alpha (B + b + \sqrt{Bb})$.

§. 269.

Aufgabe:

Aus den gegebenen Radien R, r der beyden Grundflächen (Fig. 173. Nr. I. u. II.) nebst ihrer Entfernung α den körperlichen Inhalt des abgekürzten Kegels zu finden.

Auflösung:

1. Con. decurt. $= \frac{1}{3}\alpha (B + b + \sqrt{Bb})$ (§. 250. I. Zus. u. §. 268.).

2. Nun ist die untere Grundfläche $B = R^2\pi$, die obere $b = r^2\pi$, mithin $\sqrt{Bb} = Rr\pi$, also

3. con. decurt. $= \frac{1}{3}\alpha (R^2\pi + r^2\pi + Rr\pi)$

$= \frac{1}{3}\alpha\pi (R^2 + r^2 + Rr)$.

Beyspiel:

Es sey R = 17 Zoll, r = 14,5 Zoll, α = 19 Zoll, so ist $R^2 = 289$, $r^2 = 210{,}25$, $Rr = 246{,}5$, mithin $R^2 + r^2 + rR = 745{,}75$.

Nun ist log. 745,75	=	2,8725933
$l\pi$ = log. 3,14159	=	0,4971499
log. α = log. 19	=	1,2787536
compl. dec. log. 3	=	9,5228787 − 10
		14,1713755 − 10

Nun

Nun ist $4{,}1713755 = \log. 14838$, folglich der körperliche Inhalt des gegebnen abgekürzten Kegels $= 14838$ Cubikzoll.

Anmerkung: Man vergleiche die Bestimmung des baierischen Getraidschäffels im Anhange zur Arithmetik Seite 464.

§. 270.

Aufgabe:

Aus den gegebenen Radien der beyden Grundflächen $AC = R$, $EG = r$ (Fig. 173. Nr. I.), und der Seite $AE = e$ die Seitenfläche des senkrechten abgekürzten Kegels zu finden.

Auflösung:

1. Man setze $EF = x$; so ist
2. die Seitenfläche des Kegels $AFD = R\pi\,(e+x)$, und jene von $EFK = r\pi x$ (266. Zus.).
2. Nun ist $EG \parallel AC$ (§. 172. II. Zus.), zieht man überdieß in der Ebene AFC durch E zu CF die Parallele EB, so ist
4. $\left.\begin{array}{l}\triangle EFG \backsim \triangle AFC \\ \triangle ABE \backsim \triangle AFC\end{array}\right\}$ (§. 92.), mithin auch $\triangle ABE \backsim \triangle EFG$ (§. 91. I. Zus.), also
5. $AB : AE = EG : EF$,

oder $R - r : e = r : x$, mithin $x = \frac{re}{R-r}$.

6.

6. $AB:AE=AC:AF$, das ist
$R-r:e=R:e+x$, also $e+x=\frac{Re}{R-r}$,
mithin ist

7. die Seitenfläche $AFD=R\pi\times\frac{Re}{R-r}=\frac{R^2\pi.e}{R-r}$
(Nr. 2. u. 6.), die Seitenfläche $EFK=r\pi\times\frac{re}{R-r}$
(Nr. 2. u. 5.), $=\frac{r^2\pi.e}{R-r}$, folglich

8. die Seitenfläche des abgekürzten Kegels $AEKD$
$=\frac{R^2\pi.e}{R-r}-\frac{r^2\pi.e}{R-r}=e.\pi\left(\frac{R^2-r^2}{R-r}\right)=e\pi(R+r)$.

Zusatz: Wenn die obere Grundfläche der untern unendlich nahe liegt, also e unendlich klein ist, so wird $r=R$ (§. 250. II. Zus.), also die Seitenfläche $=2r\pi.e$.

III. Abschnitt.

Von der Kugel.

§. 271.

Lehrsatz:

Der Streifen oder Gürtel von der Oberfläche der Kugel zwischen zwey Parallelkreisen FG, fg (Fig. 178.), welche unendlich nahe einander liegen, ist der Seitenfläche eines abgekürzten Kegels gleich.

Be-

Beweis:

1. AFDGBKA sey ein Kugelschnitt durch die Axe DK der Parallelkreise, mithin ein gröſster Kugelkreis (§. 252. I. Zus.).

2. In diesen ziehe man den Radius CG, und durch G eine Tangens, welche die Axe DK in T, und die Linie feg in h durchschneide.

3. Im rechtwinklichten Dreyecke CGh ist der Winkel GCh unendlich klein, folglich wird der Winkel ChG = CGh = 90°, mithin CH = CG, das ist, h fällt auf einen Punct der Peripherie des Kreises, folglich ist der unendlich kleine Bogen Gg ein Theilchen der Tangens.

4. Dreht sich nun der Halbkreis DBK um die Axe DK, so beschreibt er die Kugel, EG, eg zwey unendlich nahe Parallelkreise (§. 172. I. Zus.); der Bogen Gg einen Streifen von der Oberfläche der Kugel, welcher zwischen diesen Parallelkreisen enthalten ist.

5. Dreht sich das rechtwinklichte Dreyeck Teh um eben diese Axe TK, so beschreibt solches einen gleichseitigen Kegel (§. 248. II. Zus.), das Trapez EehG beschreibt einen abgekürzten Kegel, und Gh die Seitenfläche desselben.

6. Ist nun Gh unendlich klein, so ist es mit dem Bogen Gg einerley (Nr. 3.), folglich ist auch der unend-

unendlich schmale Streifen der Kugel zwischen zwey Parallelkreisen (Nr. 4.) mit der Seite eines abgekürzten Kegels (Nr. 5.) einerley.

§. 272.

Lehrsatz:

Der Theil FDG von der Oberfläche der Kugel (Fig. 178.), welcher über den Kugelkreis FG liegt, ist einem Rectangulo gleich, welches die Peripherie eines größten Kugelkreises zur Grundlinie und die Entfernung DE des Kugelkreises FG vom Pole D zur Höhe hat, oder $=2r\pi.DE$, wenn r den Radius der Kugel bezeichnet.

Beweis:

1. ADBKA sey ein Kugelschnitt durch die Pole oder Axe des Kreises FG, also ein größter Kugelkreis (§. 252. I. Zus.).

2. Unendlich nahe zum Kreise FG sey der Kugelkreis fg mit solchem parallel, so ist der unendlich kleine Bogen Gg ein Theilchen der Tangens durch G, und der zwischen beyden Parallelkreisen enthaltene Streif fFGg von der Oberfläche der Kugel die Seite eines abgekürzten Kegels (§. 271.), mithin

3. Zona $fFGg=2EG\pi.Gg$ (§. 270. Zus.).

4. Setzet man den Halbmesser der Kugel $=r$, jenen des kleinern Kugelkreises oder $EG=y$, den unendlich kleinen Bogen, oder Theilchen der Tangens $Gg=e$, so ist

5.

5. Zona $fFGg = 2y\pi.e$.

6. Nun ziehe man den Radius der Kugel CG, und durch G mit der Axe DK die Parallele GI, so ist

7. $CGg = 90°$ (§. 76. I. Zus.) $= EGI$, also
$EGC + CGI = CGI + IGg$,
und $EGC = IGg$, also $\triangle CEG \sim \triangle GIg$, mithin
$EG : CG = GI : Gg$, das ist aus (Nr. 4.)
$y : r = GI : e$, mithin
$e = \frac{r.GI}{y}$, folglich (Nr. 5.).

8. Zona $fFGg = 2y\pi.\frac{r.GI}{y} = 2r\pi.GI = 2r\pi Ee$.

9. Nun stelle man sich die Linie DE in unendlich viele gleiche Theile, jeden $= Ee = GI$, getheilet vor, so wird die Oberfläche von dem Theile der Kugel, welche über dem Kreise FG liegt, in unendlich viele schmale Streife getheilt, die alle einander gleich sind; denn $2r\pi$ ist für alle einerley, und eben so wird $GI = Ee$ für alle gleich angenommen.

10. Alle diese Streifen zusammen, oder die Oberfläche des Theiles FDG ist also $= 2r\pi.GI + 2r\pi.GI + \ldots = 2r\pi.Ee + 2r\pi.Ee + \ldots = 2r\pi\ (Ee + Ee + \ldots) = 2r\pi.DE$; welches der Flächeninhalt eines Rectangulums ist, dessen Grundlinie $2r\pi$ oder die Peripherie eines größten Kreises (§. 128.) und die Höhe DE die Entfernung des Poles D vom Kreise FG ist.

I. Zu-

I. Zusatz: Die Oberfläche ADB einer Halbkugel ist zwey größten Kreisen gleich; denn ADB $= 2r\pi.DC$ (Lehrs.) $= 2r^2\pi$, welches der Inhalt von zwey größten Kreisen ist (§. 151 II. Zus.).

II. Zusatz: Die ganze Oberfläche der Kugel ist vier größten Kreisen gleich, oder Superf. $= 4r^2\pi$.

III. Zusatz: Der Streifen, oder Gürtel von der Oberfläche der Kugel zwischen zwey Parallelkreisen EG, AB ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie eines größten Kreises, und die Entfernung dieser Kreise seine Höhe ist, oder Zona AFGB $= 2r\pi.EC$. Denn

$$\left.\begin{array}{l} ADB = 2r\pi.DC \\ FDG = 2r\pi.DE \end{array}\right\} \text{(Lehrs.), also}$$

$$ADB - FDG = 2r\pi\,(DC - DE), \text{ das ist}$$

$$\text{Zona AFGB} = 2r\pi\,EC.$$

IV. Zusatz: Die Oberflächen zweyer Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien. Denn Superf. $= 4R^2\pi$, superf. $= 4r^2\pi$, mithin Superf.: superf. $= R^2 : r^2$.

Anmerkung: Mehrere der bisher angeführten Sätze, alle diejenigen nemlich, welche sich auf unendliche Größen beziehen, gehören eigentlich in das Gebieth der Infinitesimalrechnung, so wie ihre angegebene Beweise auf die im I. Abschnitte der Infinitesimal-

rechnung

rechnung aufgestellten Grundbegriffe und Grundsätze beruhen. Z. B. Der Lehrsatz: **Unendlich kleine Bögen sind ihren Sehnen gleich** (§. 126.), giebt eine vollständige Gleichung an, wenn die Sehnen sowohl als ihre Bögen an ihren Gränzen betrachtet werden; inwieferne man aber diese Größen in einer bestimmten Entfernung von ihren Gränzen annimmt, so hat zwischen der Sehne und ihren Bogen nur eine unvollständige Gleichung Statt, aus welcher man aber in Verbindung mit andern vollständigen oder unvollständigen Gleichungen durch Wegschaffung der Hilfsgrößen eine vollständige Gleichung ableiten kann. Im gegenwärtigen §. wird das Verhältniß zwischen dem Kugelkreise FG, und dem Theile FDG der Oberfläche der Kugel, welcher über ihm liegt, bestimmt; man zieht daher in beliebiger Entfernung einen parallelen Hilfskreis fg, dadurch entstehen Nr. 5. u. 8. die unvollständigen Gleichungen: Zona $fFGg = 2y\pi.e = 2r\pi.GI = 2r\pi.Ee$, aus diesen wird durch Wegschaffung der Hilfsgrößen am Ende die vollständige Gleichung $FDG = 2r\pi.DE$ entwickelt, welche das Verhältniß zwischen den Kugelkreis FG, und dem ober ihr befindlichen Theile FDG der Oberfläche der Kugel nach aller Schärfe bestimmt angiebt. Man trägt diese angezogenen Sätze deßhalb schon in der Elementargeometrie vor, weil sie zur Entwicklung der ersten Kenntnisse in der Körperlehre sowohl als Longimetrie und Planimetrie nothwendig, und dem Anfänger ohne tiefere Einsicht in die Infinitesimalrechnung verständlich sind. §. 273.

§. 273.

Lehrsatz:

Wenn d, r den Durchmesser und Halbmesser einer Kugel bezeichnen, so ist ihr körperlicher, oder Sphaera $= \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi$.

Beweis:

1. Sphaera = Superf. $\times \frac{1}{3} r$ (§. 257. u. 264.).
2. Nun Superfic. $= 4 r^2 \pi$ (§. 272. II. Zus.), mithin
3. Sphaera $= 4 r^2 \pi \times \frac{1}{3} r = \frac{4}{3} r^3 \pi = 4 r^3 \times \frac{1}{3} \pi$.
4. Ferner ist $r = \frac{1}{2} d$, also $r^3 = \frac{1}{8} d^3$, folglich
5. Sphaera $= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} d^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi = d^3 \cdot \frac{1}{6} \pi$.

I. Zusatz: Da $\pi = 3{,}14159265$ (§. 227.), so ist $\frac{1}{3} \pi = 1{,}04719755$ und $\frac{1}{6} \pi = 0{,}52359877$.

II. Zusatz: Zwey Kugeln verhalten sich wie die Cubi ihrer Diameter oder Halbmesser. Denn SPHAERA $= \frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{1}{6} D^3 \pi$, und Sphaera $= \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi$ (Lehrs.); also

Sphaer. : sph. $= R^3 : r^3 = D^3 : d^3$.

III. Zusatz: $d^3 = \frac{6 . \text{sphaer.}}{\pi}$, mithin $d = \sqrt[3]{\frac{6 . \text{sphaer.}}{\pi}}$ $= \sqrt[3]{\text{sph.}} : \sqrt[3]{\frac{1}{6} \pi}$, wo allemal $\sqrt[3]{\frac{1}{6} \pi} = 0{,}805995977\ldots$ und log. $\sqrt[3]{\frac{1}{6} \pi} = -0{,}0936671$ ist. Man kann daher aus dem gegebenen Inhalt der Kugel ihren Diameter finden.

§. 274.

§. 274.

Lehrsatz:

Ein Cylinder, eine Kugel, und ein Kegel, wenn erſterer und letzterer zur Grundfläche einen größten Kreis, und zur Höhe den Durchmeſſer der Kugel haben, verhalten ſich der Ordnung nach wie die Zahlen 3, 2, 1.

Beweis:

1. Cylind. $=$ B.A (§. 260.) $= r^2\pi . 2r = 2r^3\pi$.

2. Sphaera $= \frac{4}{3}r^3\pi$ (§. 273.), mithin

3. Cyl. : ſph. $= 2r^3\pi : \frac{4}{3}r^3\pi = 2 : \frac{4}{3} = 6 : 4 = 3 : 2$.

4. Conus $=$ B. $\frac{1}{3}$ A (§. 264.) $= r^2\pi . \frac{1}{3} 2r = \frac{2}{3}r^3\pi$, alſo

5. Cyl : con. $= 2r^3\pi : \frac{2}{3}r^3\pi = 1 : \frac{1}{3} = 3 : 1$, und

6. Sphaera : con. $= \frac{4}{3}r^3\pi : \frac{2}{3}r^3\pi = 4 : 2 = 2 : 1$.

I. Zuſatz: Aehnliche Prismen verhalten ſich wie die Cubikzahlen ähnlich liegender Seiten oder Höhen; denn wenn B, b die Grundflächen, A, a ihre Höhen, L, l ähnliche Seiten bezeichnen, ſo iſt
Prism. : prism. B.A : ba (§. 260. II. Zuſ.).
Nun iſt $B : b = L^2 : l^2$ (§. 159.).
Ferner $A : a = L : l$ (§. 228. I. Zuſ.).
Folglich $BA : ba = L^3 : l^3$ (§. 219. Arithm.), alſo
Prism. : prism. $= L^3 : l^3 . = A^3 : a^3$.

II. Zuſatz: Aehnliche Cylinder verhalten ſich wie die Cubikzahlen der Diameter oder Radien ihrer Grundflächen; denn

Cyl.

Cyl.: cyl. = BA : ba (§. 260. II. Zuſ.)
B : b = $D^2 : d^2$ (§. 160.)
A : a = D : d (§. 228. I. Zuſ.), folglich
Cyl.: cyl. = $D^3 : d^3$; nun iſt D = 2R; d = 2r, alſo
Cyl.: cyl. = $8R^3 : 8r^3 = R^3 : r^3$.

III. Zuſatz: Aehnliche Pyramiden verhalten ſich wie die Cubikzahlen ähnlich liegender Seiten, oder Höhen, und ähnliche Kegel wie die Cubikzahlen der Diameter, oder Halbmeſſer ihrer Grundflächen.

I. Anmerkung: Man nimmt gewöhnlich allgemein den Satz an: Aehnliche Körper verhalten ſich wie die Würfel ähnlicher an ihnen gezogener Linien, aber der Beweis ſtützet ſich nur auf Analogie.

II. Anmerkung: Die Methoden, Körper durch ihr Gewicht, oder vermittels Sand auszumeſſen, ſind mechaniſch, und gehören nicht hieher.

IV. Hauptstück.

Von Visierstäben.

§. 275.

Aufgabe:

Den körperlichen Inhalt eines Fasses (Fig. 179.) zu finden.

I. Auflösung:

Man betrachte das Faß als einen Cylinder, welcher die Länge des Fasses AC zur Höhe, und zum Diameter seiner Grundfläche das arithmetische Mittel zwischen dem Diameter EF beym Spundloch, und dem Diameter AB des Faßbodens hat; bestimme nach §. 260. den Inhalt dieses Cylinders, welcher jenem des Fasses gleich ist; nemlich

$$\text{Dolium} = \frac{d^2\pi}{4}.AC,$$ wo aber $d = \frac{1}{2}(EF + AB)$

ist (§. 204. Zus. Arithm.).

II. Auflösung:

Man betrachte jede Hälfte des Fasses AEFB, CEFD als einen abgekürzten Kegel, und suche ihren Inhalt aus §. 269, die Summe dieser beyden abgekürzten Kegel giebt den Inhalt des Fasses. Wenn

nem-

nemlich AB = CD, GH = IH, welches der gewöhnliche Fall ist, so ist

Dolium = $\frac{2}{3}$ GHπ (EH^2 + AG^2 + EH. AG), wo man alle diese Größen messen kann.

III. Auflösung:

1. Cyl., cyl., cyl., sollen drey Cylinder bezeichnen von der gemeinschaftlichen Höhe AC, oder Länge des Fasses, wo aber EF der Diameter von der Grundfläche des ersten Cylinders, AB jener des zweyten, und CD der Diameter des dritten Cylinders ist.

2. Man berechne jeden dieser Cylinder nach §. 260, so bekömmt man den gesuchten Inhalt des Fasses, wenn man

3. zur Summe der beyden letzten Cylinder den vierfachen ersten addirt, und das Ganze durch 6 theilet, das ist

4. Dolium = $\frac{4\,\text{Cyl.} + \text{cyl.} + \text{cyl.}}{6}$

$= \frac{(4\,EF^2 + AB^2 + CD^2)\pi}{24}$. AC.

wo sich alle diese Linien messen lassen.

Zusatz: Wenn die beyden Faßböden einander gleich sind, mithin cyl. = cyl., also auch AB = CD, so ist

Dolium $= \frac{4\,\text{Cyl.} + 2\,\text{cyl.}}{6} = \frac{2\,\text{Cyl.} + \text{cyl.}}{3}$

$= \frac{(2\,EF^2 + AB^2)\pi}{12}$. AC.

I. Anmerkung: Alle diese drey Auflösungen stützen sich auf willkührliche Annahmen, weil sich das Faß seiner unregelmäßigen Gestalt wegen auf keinen der bisher betrachteten Körper bringen läßt. Die erste Auflösungsmethode, welche das Faß für das arithmetische Mittel zwischen zwey Cylindern nimmt, ist die gewöhnlichste und leichteste, weicht aber der Erfahrung gemäß sehr beträchtlich von der Wahrheit ab. Die zweyte Methode, welche das Faß auf zwey abgekürzte Kegel reducirt, kömmt der Wahrheit etwas näher, giebt aber noch immer beträchtliche Fehler, und ist in der Anwendung beschwerlicher, als die vorhergehende. Die dritte Methode nimmt AEC für eine krumme Linie, kömmt daher der Wahrheit am nächsten. Lambert, der sie in seinen mathematischen Beyträgen I. u. III. Band vorträgt, empfiehlt sie sehr; die Gründe davon werde ich später in der höhern Geometrie nachtragen.

II. Anmerkung: Von der Linie AC, die man eigentlich messen kann, muß man erst die Dicke der beyden Faßböden, die etwa jener der Dauben gleich ist, abziehen, um die wahre Faßlänge zu erhalten.

§. 276.

Aufgabe:

Die Menge der in einem gegebenen vollen Fasse enthaltenen Flüßigkeit nach einem landesüblichen Getränkenmaaße, z. B. in baierischen Eymern, Maßen u. s. f. zu bestimmen.

Auflö-

Auflösung:

1. Man suche den Inhalt des Fasses im Cubikmaaße z. B. baierischen Cubikschuhen (§. 275.).

2. Da nun die baierische Maaß 43, und der Eymer zu 60 Maß 2580 baierische Decimal-Cubikzoll hält, so läßt sich

3. nach der Regel De Tri die Menge der enthaltenen Flüßigkeit in baierischen Eymern, Maßen u. s. w. bestimmen.

§. 277.

Erklärung:

Ein Stab, der so eingerichtet ist, daß man ohne beschwerliche Rechnung, gleichsam mechanisch, vermittels desselben die Menge der in einem vollen Fasse enthaltenen Flüßigkeit im landesüblichen Getränkmaaße angeben kann, heißt ein Visierstab, von denen

a. der cylindrische, oder quadratische, und

b. der Kreuz- oder cubische Visierstab die bekanntesten sind.

§. 278.

Aufgabe:

Einen cylindrischen Visierstab zu verfertigen.

Auflösung:

1. Man lasse sich einen Cylinder KN (Fig. 180.) verfertigen, welcher genau z. B. eine baierische Maß fasset.

2.

2. Den Diameter KL von der Grundfläche dieſes Diameters trage man (Fig. 181.) auf die beyden Schenkel des rechten Winkel QOP auf, nemlich $OP = Oa = KL$, und ziehe die Hypothenuſe aP, ſo iſt

3. $aP^2 = Oa^2 + OP^2$ (§. 96. II. Zuſ.) $= 2KL^2$.

4. Dieſe Hypothenuſe aP trage man aus O auf den Schenkel OQ auf, mache nemlich $Ob = aP$, ſo iſt auch $Ob^2 = 2KL^2$.

5. Nun ziehe man wieder die Hypothenuſe bP, und nehme auf dem Schenkel OQ, $Oc = bP$, ſo iſt

6. $Oc^2 = bP^2 = Ob^2 + OP^2 = 3KL^2$ (Nr. 2. u. 4.).

7. Auf die nemliche Art verzeichne man die Linien Od, Oe u. ſ. f., ſo iſt $Od^2 = 4KL^2$, $Oe^2 = 5KL^2$ u. ſ. f.

8. Endlich nehme man auf der Seite TV (Fig. 182.) eines prismatiſchen Stabes $T1 = Oa$, $T2 = Ob$, $T3 = Oc$ u. ſ. f., ſo iſt

9. $T1^2 = KL^2$ (Nr. 2.), $T2^2 = 2KL^2$ (Nr. 4.), $T3^2 = 3KL^2$ (Nr. 6.), u. ſ. f., oder allgemein $Tn^2 = nKL^2$.

10. Auf der andern Seite RS des Stabes verzeichne man die Linien R1 der Höhe oder Seite KM des ſenkrechten Cylinders gleich; ferner $R2 = 2KM$, $R3 = 3KM$, und überhaupt $Rn = nKM$.

11. Ein auf dieſe Art (Nr. 8. u. 10.) bezeichneter prismatiſcher Stab iſt der verlangte Viſirſtab, wel-

welcher cylindrisch heißt, weil sich seine Theorie auf jene des Cylinders gründet. Man nennet solchen auch wegen den Verhältnissen (§. 260. IV. Zus.), auf welche seine Anwendung beruhet, den quadratischen Visierstab.

§. 279.

Aufgabe:

Durch Hilfe eines cylindrischen Visirstabes die Menge der in einem gegebenen Cylinder enthaltenen Flüßigkeit im gewöhnlichen Getränkmaaße, z. B. in baierischen Maßen anzugeben.

Auflösung:

1. Man messe mit dem cylindrischen Visirstabe auf der Seite RS die Höhe des gegebenen Cylinders, sie halte z. B. auf dem Stabe R 3.
2. Mit dem Stabe messe man auf der Seite TV den Diameter des gegebenen hohlen Cylinders, welcher z. B. T 5 hält.
3. Nun multiplicire man die Zahlen 3 und 5, so giebt ihr Product die Anzahl der baierischen Maße, welche der gegebene Cylinder in sich fasset.

Beweis:

4. Cyl. bezeichne den gegebenen Cylinder, welcher also R 3 zur Höhe, und T 5 zum Durchmesser seiner Grundfläche hat.
5. cyl. drücke den Cylinder KN (Fig. 180.) aus, welchen man zur Verfertigung des Visirstabes ge-

gebraucht hat, der also eine Maß fasset, und KM = R 1 zur Höhe, und KL = T 1 (§. 278. Nr. 8. und 10.) zum Durchmesser seiner Grundfläche hat.

6. cyl. bezeichne einen dritten Cylinder, welcher mit dem ersten gleiche Grundfläche, und mit dem zweyten gleiche Höhe hat, dessen Höhe folglich KM = R 1, und der Diameter von der Grundfläche T 5 ist, so ist

7. cyl. : cyl. = $T5^2 : T1^2$ (§. 260. IV. Zus.)
= $5KL^2 : KL^2$ (§. 278. Nr. 9.)
= 5 : 1 (§. 197. VII. Zus. Ar.).

8. Cyl. : cyl. = R 3 : R 1 (§. 260. III. Zus.)
= 3 KM : KM (§. 278. Nr. 10.)
= 3 : 1, folglich

9. Cyl. : cyl. = 5. 3 : 1 (§. 219. II. Zus. Arith.), also Cyl. = 15 cyl.

10. Nun hält cyl. eine baierische Maaß, folglich der gegebene 15 baierische Maß, soviel nemlich, als das Product der Zahlen, die man auf dem Visirstabe Nr. 1. u. 2. findet, angiebt.

§. 280.

Aufgabe:

Die Menge der in einem vollen Fasse enthaltenen Flüssigkeit (Fig. 179.) vermittels des cylindrischen Visirstabes in baierischen Maßen anzugeben.

Auflö-

Auflösung:

1. Man messe mit der Seite TV des Visirstabes die Spundtiefe EF, und die beyden Bodentiefen AB, CD, und bemerke die Zahlen z. B. 6, 5, 4, auf welche sie treffen, wenn EF=T6, AB=T5, CD=T4 ist.

2. Eben so messe man mit der andern Seite RS des Stabes die Länge AC des Fasses, und bemerke die Zahl, die sie bestimmt, z. B. 8, wenn AC =R8 ist.

3. Nun nehme man die vierfache Zahl der Spundtiefe, addire ihr die beyden Bodentiefen, multiplicire die ganze Summe mit der Länge des Fasses, und dividire solches mit der Zahl 6, so giebt der Quotient die Menge der im Fasse enthaltenen Flüßigkeit in baierischen Massen, das ist z. B.

9. Dolium $= \frac{(4.6+5+4).8}{6} = \frac{33.8}{6} = 44$,

mithin hält solches 44 baierische Maße.

Beweis:

10. Cyl., cyl., cyl. sollen drey verschiedene Cylinder anzeigen, welche die Länge AC des Fasses zur gemeinschaftlichen Höhe haben, hingegen EF der Diameter von der Grundfläche des ersten Cylinders, AB vom zweyten, CD jener vom dritten ist, so ist in baierischen Maßen

11. Cyl. =6.8, also 4 Cyl. =4.6.8
cyl. =5.8; cyl. =4.8 } (S. 279.).

12.

12. Ferner ist

$$\text{Dolium} = \frac{4\,\text{Cyl.} + \text{cyl.} + \text{cyl.}}{6} \text{ (§. 275. III. Aufl.)}$$

$$= \frac{4.6.8 + 5.8 + 4.8}{6} = \frac{(4.6 + 5 + 4)8}{6}.$$

I. Zusatz: Fände man, daß die beyden Bodentiefen einander gleich sind, z. B. jede $AB = CD = T5$, so bekömmt man die Menge der im Fasse enthaltenen Flüßigkeit, wenn man zur doppelten Spundtiefe eine dieser Bodentiefe addirt, diese Summe mit der Faßlänge multiplicirt, und das Product durch 3 dividirt, so ist im gegebenen Falle:

$$\text{Dolium} = \frac{(2.6 + 5).8}{3} = \frac{17.8}{3} = \frac{136}{3} = 45 + \tfrac{1}{3}\,\text{Maß.}$$

$$\text{Denn Dolium} = \frac{(4.6 + 5 + 5).8}{6} = \frac{2(2.6 + 5).8}{2.3}$$

$$= \frac{(2.6 + 5).8}{3} = 45 + \tfrac{1}{3}\,\text{Maß.}$$

II. Zusatz: Nach der gewöhnlichen Regel (§. 275. I. Aufl.) würde eben dieses Fäßgen $= \frac{(6+5).8}{2} = \frac{11.8}{2}$ $= 44$ baierische Maß halten.

§. 281.

Erklärung:

Der cubische oder Kreuz-Visirstab heißt der Stab XZ (Fig. 184.), welcher so auf einer Seite eingetheilet ist, daß, wenn man ihn durch das Spundloch E. (Fig. 179.) bis an einen Faßboden

nach

nach D geschoben hat, durch jene Zahl, die auf E trift, im gewöhnlichen Getränkmaaße z. B. Eymern, Maßen u. s. f. die Menge der im vollen Fasse enthaltenen Flüßigkeit angiebt.

§. 282.

Aufgabe:

Einen Kreuz-Visirstab zu verfertigen.

Auflösung:

1. Man lasse sich ein Fäßgen (Fig. 183.) verfertigen, welches im landesüblichen Maaße genau z. B. einen baierischen Eymer hält.

2. Durch das Spundloch desselben stecke man einen Stab XZ (Fig. 184.), der bey X keilförmig zugeschnitten ist, damit er genau bey d in die Nutte zwischen den Dauben und dem Boden hineinpasse, und bemerke nun die Länge de = X 1.

3. Nun verfertige man einen andern Maßstab, trage auf einer geraden Linie de so oft auf, als es angeht, theile eine Abtheilung davon, oder de wieder in 1000 Theile nach der Anweisung des 185. §.

4. Auf dem Stabe XZ trage man ebenfalls de auf, so oft es angeht, und setze nach der ersten Abtheilung die Zahl 1, nach der zweyten 8, nach der dritten 27, und überhaupt nach der nten n^3, das ist: X 1 = de. X 8 = 2 de, X 27 = 3 de, .. X n^3 = n de.

5.

5. Endlich verzeichne man vermittels des obigen tausentheiligen Maaßstabes auf dem Stabe, von X aus, folgende Linien:

$X2 = de\sqrt[3]{2} = de.\ 1{,}260 = 1260$ (Nr. 3.)

$X3 = de\sqrt[3]{3} = de.\ 1{,}442 = 1442$

$X4 = de\sqrt[3]{4} = de.\ 1587 = 1587$

$X5 = de\sqrt[3]{5} = de.\ 1{,}710 = 1710$

$X6 = de\sqrt[3]{6} = de.\ 1{,}817 = 1817$

$X7 = de\sqrt[3]{7} = de.\ 1{,}913 = 1913$

$X8 = de\sqrt[3]{8} = de. \quad = 2000$ (Nr. 4.)

$X9 = de\sqrt[3]{9} — de.\ 2{,}080 = 2080$ u. s. f.

so ist

6. dieser auf die angezeigte Art eingetheilte Stab XZ ein cubischer oder Kreuz-Visirstab.

§. 283.

Aufgabe:

Wenn das Faß, oder Dol. (Fig. 179.) dem Fäßgen, oder dol. (Fig. 183.) ähnlich ist, die Menge der im erstern enthaltenen Flüßigkeit im landesüblichen Maaße z. B. in baierischen Eymern, Maßen anzugeben.

Auflösung:

Man schiebe durch das Spundloch E den Visirstab ZX (Fig. 184.) bis an den untersten Punct D des Faßbodens,

bodens, ſo daß X an D kömmt, bemerke auf dem Stabe die Zahl, welche bey E ſteht, z. B. 7, ſo alſo, daß ED = X 7 iſt, ſo giebt dieſe Zahl die Menge der im Faſſe enthaltenen Eymer an.

Beweis:

Dol. : dol. = $DE^3 : de^3$ (§. 274. I. Anmerk.)
= $X7^3 : X1^3$ (§. 282. Nr. 4.)
= $7de^3 : de^3$ (§. 282. Nr. 4. u. 5.) = 7 : 1
folglich iſt
Dol. = 7 dol., und weil dol. einen baieriſchen Eymer faſſet, ſo hält das gegebene Faß deren 7, ſoviel nemlich, als die Zahl bey E angiebt.

Anmerkung: Die richtige Anwendung des cubiſchen Viſirſtabes ſetzet alſo immer voraus, daß jenes Faß, welches man damit meſſen will, demjenigen, welches man bey Verfertigung des Stabes gebraucht hat genau ähnlich ſey, welches gewiß ſelten der Fall iſt.

Trigonometrie.

Einleitung

vom Gegenstande der Trigonometrie.

§. 284.

Erklärungen:

a. Wenn man an beyde Endespuncte eines Bogens AD (Fig. 185.) Radien, und aus dem einem Endspuncte D auf den andern Radius AC einen Perpendikel DE zieht, so heißt solcher der Sinus des Bogens AD, oder des Winkels ACD; das ist: DE = Sin. arc. AD = Sin. ACD.

b. Der Theil AE des Diameters, welcher zwischen dem Puncte A und dem Sinus liegt, heißt der Quersinus (Sinus versus) vom Bogen AD, oder dem Winkel ACD.

§. 285.

Erklärungen:

a. Wenn man durch einen Endespunct A des Bogens AD (Fig. 185.) eine Tangens des Kreises errich-

errichtet, und durch den andern Endespunct D den gezogenen Radius CD nach einer Seite so verlängert, bis solcher mit obiger Tangente zusammenstoßt, so heißt der bestimmte Theil AG von der Tangens des Kreises die Tangens des Bogens AD, oder des Winkels ACD, und

b. die Linie CG, vom Mittelpuncte C an, bis zum Durchschnittspuncte G, die Secans des nemlichen Bogens AD, oder Winkels ACD.

§ 286.

Erklärung:

Ein spitziger Winkel oder Bogen α, welcher zu einem gegebenen Winkel oder Bogen A addirt, oder davon subtrahirt 90°, oder, wenn A > 180° ist, 270° giebt heißt die Ergänzung, oder das Complement von A, z. B. vom Bogen AD (Fig. 185.) ist DH, von AHL aber LH das Complement; eben so ist vom Bogen AHBN der Bogen NQ, und vom Bogen AHBQR der Bogen RQ das Complement. Auf die nemliche Art sind von den Winkeln ACD, ACL, und den erhabenen Winkeln ACN, ACR der Ordnung nach DCH, LCH, NCQ, RCQ die Complemente.

§. 287.

Erklärung:

Der Sinus, die Tangens, die Secans vom Complemente eines Winkels oder Bogens heißt der Cosinus,

nus, die Cotangens, die Cosecans des Winkels oder Bogens, z. B. (Fig. 185.) weil DH das Complement vom Bogen AD, oder der Winkel DCH vom Winkel ACD ist, so ist DF = Sin. DH = Cosin. AD, HI = tang. DH = cot. AD; CI = sec. DH = cosec. AD.

§. 288.

Erklärungen:

a. Die bisher (§. 284, 285, 287.) angeführten Linien heißen trigonometrische Linien.

b. Die Wissenschaft, die Verhältnisse trigonometrischer Linien für jeden Bogen oder Winkel zu bestimmen, und vermittels derselben aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, welche in Seiten und Winkeln bestehen, die übrigen durch Rechnung zu finden, heißt Trigonometrie (§. 3. Arithm.).

§. 289.

Erklärungen:

a. Jener Theil der Trigonometrie, welcher aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes die übrigen drey zu berechnen lehret, heißt Ebene Trigonometrie, wenn das Dreyeck geradlinigt ist,

b. Sphärische Trigonometrie, wenn die Seiten des Dreyeckes Bögen von größten Kreisen einer Kugel sind (§. 252. I. Zus.).

I. Hauptstück.

Von den Verhältnissen trigonometrischer Linien.

I. Abschnitt.

Von den Verhältnissen trigonometrischer Linien einfacher Bögen und Winkel.

§. 290.

Lehrsatz:

Zwey gleiche spitzige Winkel ACD, BCL (Fig. 185.) oder Bögen AD, BL haben gleiche Sinus.

Beweis:

CD = CL (§. 17. 1. Zus.), E = 90° = M (§. 284. a.) DCE = LCM (per hyp.), also △ DEC ≅ △ LMC, folglich DE = LM, das ist, Sin. ACD = Sin. BCL.

1. Zusatz: Der Sinus eines spitzigen Bogens AD, oder Winkels ACD ist der halben Sehne DR vom doppelten Bogen gleich. Denn man verlängere DE bis R, so ist DE = ½ DR (§. 60. 1. Zus.), und

der Bogen AD = ½ DAR (§. 73. II. Aufl.), folglich ist der Sinus DE der halben Sehne DR vom doppelten Bogen DAR gleich.

II. Zusatz: Der Sinus eines Bogens oder Winkels von 30° ist dem halben Radius gleich. Denn Sin. 30° = ½ chord. 60° (I. Zus.) = ½ r (§. 69.). Setzet man r = 1, so ist Sin. 30° = 0,5.

III. Zusatz: Der Sinus eines spitzigen Winkels A an der Peripherie (Fig. 193.) ist der halben Sehne BC seines Bogens gleich. Denn BAC = ½ BGC (§. 72.) = BGE (§. 73. II. Aufl.), folglich Sin. BAC = Sin. BGE (Lehrs.) = ½ BC (I. Zus.).

§. 291.

Lehrsatz:

Der stumpfe Winkel BCD hat mit seinem spitzigen Nebenwinkel ACD (Fig. 185.) den nemlichen Sinus DE.

Beweis:

1. Die beyden Radien AC, CB liegen in einer geraden Linie AB (§. 11. a.).

2. Auf diese ist aber aus einem Puncte D nur ein Perpendikel DE möglich (§. 38. I. Zus.), folglich ist

3. DE der gemeinschaftliche Sinus beyder Nebenwinkel.

§. 292.

§. 292.

Erklärung:

Wenn ein Bogen oder Winkel A > 90° ist, so heißt der spitzige Bogen oder Winkel B, welcher zu A addirt, oder davon subtrahirt, entweder 180° oder 360° giebt, das Supplement von A, z. B. vom Bogen AL ist LB, von AHBN der Bogen BN, endlich vom Bogen AHBQR ist AR der Supplementsbogen (ich weis keinen andern schicklichen Namen, da Complement schon eine eigene bestimmte Bedeutung hat). Eben so sind von dem stumpfen Winkel ACL, den erhabenen Winkeln ACN, ACR die spitzigen Winkel BCL, BCN, RCE die Supplemente.

I. Zusatz: Der stumpfe Winkel A hat mit seinem Supplemente B gleichen Sinus. Denn C sey der spitzige Nebenwinkel von A, so ist Sin. A = Sin. C (§. 291.), ferner ist A + C = 180° = A + B, also B = C, und Sin. B = Sin. C (§. 190.), folglich Sin. A = Sin. B.

II. Zusatz: Der erhabene Winkel A zwischen 180° und 270° hat mit seinem Supplemente B gleichen Sinus. Denn der erhabene Winkel ACN (Fig. 185.) hat den spitzigen Winkel ACD = BCN zum Supplemente; nun ist △DEC ≅ △NMC, also MN = DE, das ist Sin. ACN = Sin. ACD, folglich allgemein Sin. A = Sin. B.

III. Zusatz: Der erhabene Winkel A zwischen 270° und 360° hat mit seinem Supplemente B gleichen

Sinus. Denn vom erhabenen Winkel ACR nehme man ACD gleich dem spitzigen Winkel ACR, so ist ACD das Supplement; ferner ist wieder $\triangle DEC \cong \triangle REC$, also $RE = DE$, das ist: Sin. ACR = Sin. ACD, folglich allgemein Sin. A = Sin. B.

IV. Zusatz: Ein stumpfer oder erhabener Winkel A hat mit seinem spitzigen Supplementswinkel B gleichen Sinus (I—III. Zus.). Wenn also der Sinus für jeden spitzigen Winkel B bestimmt ist, so ist auch der Sinus für jeden stumpfen oder erhabenen Winkel A gegeben.

V. Zusatz: Der stumpfe Peripheriewinkel BEC (Fig. 193.) hat zum Sinus die halbe Sehne BC seines Bogens. Denn $BEC + BAC = 180°$ (§. 72. V. Zus.), mithin Sin. BEC = Sin. BAC (I. Zus.) = $\frac{1}{2}$BC (§. 290. III. Zus.).

VI. Zusatz: Jeder Winkel an der Peripherie hat die halbe Sehne seines Bogens zum Sinus (V. Zus. u. §. 290. III. Zus.).

VII. Zusatz: Der Sinus eines spitzigen Winkels wächst mit dem Winkel so, daß Sin. $0° = 0$; und Sin. $90° = r$. Der Sinus vom stumpfen Winkel nimmt ab, wenn letzterer wächst, so daß Sin. $180° =$ Sin. 0 wird (I. Zus.). Der Sinus eines erhabenen Winkels wächst mit dem Winkel, bis Sin. $270° = r$ wird (II. Zus.), von da nimmt der Sinus wieder ab, wenn der Winkel noch größer wird, und Sin. $360°$ ist $= 0$ (III. Zus.).

VIII.

VIII. Zusatz: Den Winkeln und Bögen von 90° und 270° entspricht der größte Sinus, welcher dem Radius gleich ist, setzet man letztern = 1, so geben die Sinus aller übrigen Winkel oder Bögen, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, ächte Brüche; man nennet daher den größten Sinus den Sinus totus, der aber immer mit r oder 1 bezeichnet wird.

IX. Zusatz: Die Sinus für hohle Winkel oder Bögen vom ersten Halbkreise haben mit den Sinusen erhabener Winkel, oder Bögen vom zweyten Halbkreise eine entgegengesetzte Lage, sie können also als entgegengesetzte Größen erstere mit +, letztere mit — bezeichnet werden (§. 35. b. u. VII. Zus. Arithm.), das ist: die Sinus von 0 — 190° sind positiv, von 180° bis 360° negativ.

§. 293.

Lehrsatz:

Gleiche Winkel A, C haben gleiche Complemente α, γ.

Beweis:

1. Wenn die Winkel oder Bögen kleiner als 180° sind, so ist

2. $A \pm \alpha = 90° = C \pm \gamma$ (§. 286.), wenn also

3. $A = C$, so ist $\alpha = \gamma$.

4. Wenn hingegen die gegebenen Winkel oder Bögen größer als 180° sind, so ist

5. $A \pm \alpha = 270° = C \pm \gamma$, folglich wieder

6.

6. für $A = C$, das Complement $\alpha = \gamma$.

Zusatz: Gleiche Winkel oder Bögen A, C haben gleiche Cosinus. Denn $\alpha = \gamma$ (Lehr), und spitzig (§. 286.), also Sin. α Sin. γ (§. 290.), das ist, Cos. A = cos. C.

§. 294.

Lehrsatz:

Wenn der Bogen oder Winkel A größer als 90° ist, so hat das Supplement B mit A gleiches Complement.

Beweis:

1. Für A zwischen 90° und 180° ist
2. $A - \alpha = 90°$
   $B + \beta = 90°$, also
   $A - \alpha + B + \beta = 180° = A + B$ (§. 292.), mithin
3. $\beta = \alpha = 0$, oder $\alpha = \beta$.
4. Für A zwischen 180° und 270° wird
5. $A + \alpha = 270°$
   $B + \beta = 90$, also
   $A + \alpha - B - \beta = 180° = A - B$, folglich
6. $\alpha - \beta = 0$; oder $\alpha = \beta$.
7. Für A endlich zwischen 270° und 360° ist
8. $A - \alpha = 270°$
   $B + \beta = 90°$, mithin
   $A - \alpha + B + \beta = 360° = A + B$, also

9.

9. ebenfalls $\alpha = \beta$, folglich ist

10. allemal aus Nr. 3, 6. u. 9. die Complemente gleich, oder $\alpha = \beta$.

Zusatz: Wenn der Winkel oder Bogen $A > 90°$ ist, so ist sein Cosinus jenem des Supplementes B gleich. Denn $\alpha = \beta$ (Lehrs.), also Sin. α = Sin. β (§. 290.), das ist Cos. A = Cos. B.

§. 295.

Lehrsatz:

Für einen spitzigen Winkel ACD (Fig. 185.) oder Bogen AD ist der Cosinus DF dem Theile CE des Radius gleich, welcher zwischen dem Mittelpuncte und dem Sinus liegt.

Beweis:

DE ∦ HC, und DF ∦ AC (§. 42. I.), also DF = CE (§. 45. II. Zus.).

§. 296.

Lehrsatz:

Für jeden Winkel oder Bogen A ist

$$\text{Cos. } A = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. } A^2)}.$$

Beweis:

1. Wenn A kleiner als 90° ist, wie der Winkel ACD (Fig. 185.) oder der Bogen AD, so ist

2. CE der Cosinus davon (§. 295.), und

3.

3. $CE^2 = CD^2 - DE^2$ (§. 96. III. Zuſ.); das iſt

4. $(\text{Cos. A})^2 = r^2 - (\text{Sin. A})^2$, oder wie man ſich der Kürze wegen ausdrückt: $\text{Cos. A}^2 = r^2 - \text{Sin. A}^2$; folglich

5. $\text{Cos. A} = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. A}^2)}$.

6. Für $A > 90°$ nehme man deſſen Supplement B, ſo iſt

7. $\text{Cos. B} = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. B}^2)}$ (Nr. 5.) $= \text{Cos. A}$ (§. 294. Zuſ.).

8. Da ferner $\text{Sin. B} = \text{Sin. A}$ (§. 292. IV. Zuſ.), alſo auch $\text{Sin. B}^2 = \text{Sin. A}^2$, ſo iſt

9. $\sqrt{(r^2 - \text{Sin. B}^2)} = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. A}^2)} = \text{Cos. A}$ (Nr. 7.).

I. Zuſatz: Für einen jeden gegebenen Winkel A bildet deſſen Sinus die gegenüber ſtehende, der Coſinus die anliegende Seite, und der Radius die Hypothenuſe eines rechtwinklichten Dreyeckes (§. 144. und §. 148. VII. Zuſ.).

II. Zuſatz: $\text{Cos. } 30° = \text{Sin. } 60° = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}r^2)}$ (§. 290. II. Zuſ.) $= \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{3} = \frac{1}{2}r \times 1{,}7320508$. Für $r = 1$ iſt $\text{Cos. } 30° = 0{,}8660254 = \text{Sin. } 60°$.

III. Zuſatz: $\text{Cos. } 0° = \sqrt{(r^2 - 0)} = r$, ſo wie nun der Winkel wächst, wächst auch ſein Sinus (§. 292. VII Zuſ.), folglich nimmt vermög der Gleichung des Lehrſatzes der Coſinus ab (§. 30. Nr. 4. Arithm.), bis $\text{C. s. } 90° = \sqrt{(r^2 - r^2)} = 0$ wird. Nun wächst wieder der Coſinus mit dem Winkel, und $\text{Cos. } 180° = r$;

$=r$; hier nimmt abermal der Cosinus ab, und Cos. $270° = 0$. Endlich wächst wieder der Cosinus mit dem Winkel oder Bogen, und Cos. $360° = r$.

IV. Zusatz: Aus der Construction (Fig. 185.) läßt sich leicht einsehen, daß die Cosinus im ersten und vierten Quadranten mit jenen des zweyten und dritten eine entgegengesetzte Lage haben, folglich die Cosinus von $0°$ bis $90°$ und von $270° - 360°$ positiv, von $90°$ aber bis $270°$ negativ sind.

V. Zusatz: Aus dem Sinus eines Winkel läßt sich dessen Cosinus aus dem Lehrs. der Größe nach, und aus dem IV. Zus. der Lage nach bestimmt angeben.

§. 297.

Lehrsatz:

Für jeden Bogen oder Winkel A ist der Quersinus, oder

Sinv. $A = r - \text{Cos. } A$.

Beweis:

1. Wenn der Winkel oder Bogen A kleiner als $90°$ wie der Bogen AD (Fig. 185.), oder größer als $270°$, wie der Bogen AHBQF, so ist
2. der Quersinus $AE = AC - CE$ (§. 284. b.), folglich
3. im ersten und vierten Quadranten ist Sinv. $A = r - \text{Cos. } A$.
4. Für Bögen hingegen und Winkel im zweyten und dritten Quadranten von $90°$ bis $270°$ wie AHL, und AHBN ist

5.

5. der Querſinus AM = AC + CM, alſo

6. Sinv. A = r + Cos. A, oder weil im zweyten und dritten Quadranten die Coſinus negativ ſind (§. 296. IV. Zuſ.).

7. Sinv. A = r — (— Cos. A.) (§. 35. VI. Zuſ. Ar.)

I. Zuſatz: Sinv. 0 = Sinv. 360° = 0; Sinv. 90° = Sinv. 270° = r; Sinv. 180° = 2 r.

II. Zuſatz: Der Querſinus bleibt immer poſitiv.

§. 298.

Lehrſatz:

Zwey gleiche ſpitzige Winkel ACD, BCL (Fig. 185.), haben gleiche Tangenten und Secanten.

Beweis:

AC = BC, A = 90° = B, ACG = BCO (per hyp.), alſo △ CAG ≅ △ CBO, und AG = BO, CG = CO, das iſt, tang. ACD = tang. BCL; ſec. ACD = ſec. BCL.

I. Zuſatz: Gleiche Winkel oder Bögen A, C haben gleiche Coſecanten und Cotangenten. Denn $\alpha = \gamma$ (§. 293.), und ſpitzig, folglich iſt auch die Tangens und Secans vom Complemente A, der Tangens und Secans vom Complemente C gleich (Lehrſ.), das iſt, A, C haben gleiche Cotangenten und Coſecanten (§. 287.).

II. Zuſatz: Wenn der Winkel oder Bogen A > 90°, ſo hat A mit dem Supplemente B gleiche Cotangens

und

und Cosecans. Denn $\alpha = \beta$ (§. 294.), folglich sind die Tangenten und Secanten von α, β gleich (Lehrs.), also auch die Cotangens und Cosecans von A und B.

§. 299.

Lehrsatz:

Der stumpfe Winkel BCD (Fig. 185.) hat mit seinem spitzigen Nebenwinkel ACD gleiche Tangens und Secans.

Beweis:

1. Vom stumpfen Winkel BCD ist BP die Tangens, und die in der Verlängerung von DC liegende Linie CP die Secans (§. 285.).
2. AC und BC liegen in einer geraden Linie (§. 11. 2.), und eben so CG, CP, also
3. ACG = BCP (§. 13. Zus.), A = 90° = B; AC BC, also $\triangle$ CAG $\cong$ $\triangle$ CBP, folglich
4. BP = AG, CP = CG, das ist: tang. BCD = tang. ACD, und Sec. BCD = Sec. ACD.

I. Zusatz: Ein stumpfer Winkel A hat mit seinem spitzigen Supplementswinkel B gleiche Tangens und Secans. Denn C sey der spitzige Nebenwinkel von A, so ist tang. A = tang. C (Lehrs.), und A + C = 180° = A + B, mithin B = C, folglich tang. B = tang. C (§. 298.), also tang. A = tang. B, und auf die nemliche Weise folgt auch Sec. A = Sec. B.

II. Zu-

II. Zusatz: Der erhabene Winkel A zwischen 180° und 270° hat mit seinem Supplemente B gleiche Tangens und Secans. Denn der erhabene Winkel ACN hat den spitzigen ACD = BCN zum Supplemente; nun ist aber AG die gemeinschaftliche Tangens, und CG die gemeinschaftliche Secans des erhabenen Winkels ACN, und des hohlen spitzigen ACD.

III. Zusatz: Der erhabene Winkel A zwischen 270° und 360° hat mit seinem spitzigen Supplementswinkel B gleiche Tangens und Secans. Denn für den erhabenen Winkel ACR ist der hohle spitzige ACD = dem spitzigen ACR das Supplement; nun ist $\triangle CAG \cong \triangle CAK$, also $AG = AK$, $CG = CK$; das ist, A und B haben gleiche Tangens und Secans.

IV. Zusatz: Wenn der Winkel oder Bogen $A > 90°$, so hat A mit seinem Supplemente B allemal gleiche Tangens und Secans (I—III. Zus.).

§. 300.

Lehrsatz:

$$\text{Sec. } A = \sqrt{(r^2 + \text{tang. } A^2)}.$$

Beweis:

1. Wenn $A < 90°$ wie der Bogen AD, oder der Winkel ACD (Fig. 185.), so ist
2. $CG^2 = AC^2 + AG^2$ (§. 96. III. Zus.), das ist
3. $\text{Sec. } A^2 = r^2 + \text{tang. } A^2$.

4.

4. Für $A > 90°$ nehme man dessen Supplement B, so ist

5. $\text{Sec. } B^2 = r^2 + \text{tang. } B^2$ (Nr. 3.).

6. Ferner ist $\text{Sec. } B = \text{sec. } A$, $\text{tang. } B = \text{tang. } A$ (§. 299. IV. Zus.), also auch für $A > 90°$ ist

7. $\text{Sec. } A^2 = r^2 + \text{tang. } A^2$, und $\text{Sec. } A = \sqrt{(r^2 + \text{tang. } A^2)}$.

I. Zusatz: Für jeden gegebenen Winkel A bildet der Radius den anliegenden, die Tangens den entgegenstehenden Catheten, und die Secans die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyeckes (§. 144.).

II. Zusatz: $\text{tang. } 45° = r$; denn wenn $ACD = 45°$, so ist auch $AGC = 45°$ (§. 47. VI. Zus.), mithin $AG = AC$ (§. 27.) $= r$.

III. Zusatz: $\text{Sec. } 45° = \sqrt{(r^2 + \text{tang. } 45°^2)} = \sqrt{2}\, r^2 = r\sqrt{2}$; für $r = 1$, wird $\text{Sec. } 45° = \sqrt{2} = 1{,}4142136$.

§. 301.

Lehrsatz:

$$\text{tang. } A = \frac{r \cdot \text{Sin. } A}{\text{cos. } A}.$$

Beweis:

1. Wenn der Bogen oder Winkel $A < 90°$ wie der Bogen AD, oder Winkel ACD (Fig. 185.), so ist

2. $\triangle DEC \sim \triangle GAC$, also
$CE : DE = CA : AG$, das ist
$\text{Cos. } A : \text{Sin. } A = r : \text{tang. } A$, folglich

3.

3. $\text{tang. } A = \frac{\text{r. Sin. } A}{\text{cos. } A}$

4. Für den Winkel oder Bogen A, wenn solcher $> 90°$ ist, nehme man dessen Supplement B, so ist

5. $\text{tang. } B = \frac{\text{r. Sin. } B}{\text{cos. } B}$ (Nr. 3.).

6. Ferner ist $\text{Sin. } A = \text{Sin. } B$ (§. 292. IV. Zus.), $\text{cos. } A = \text{Cos. } B$ (§. 294. Zus.), $\text{tang. } A = \text{tang. } B$ (§. 299. IV. Zus.), folglich ist auch für $A > 90°$, also

7. allgemein $\text{tang. } A = \frac{\text{r. Sin. } A}{\text{cos. } A}$.

I. Zusatz: Im ersten Quadranten wächst die Tangens mit dem Winkel oder Bogen A, denn mit A wächst Sin. A, und der cos. A nimmt ab, folglich wächst tang. A (§. 74. IV. Zus. Arithm.). Aus eben diesen Gründen sieht man, daß die Tangens im zweyten Quadranten abnimmt, wenn der Winkel wächst, im dritten die Tangens mit dem Winkel zunimmt, und im vierten die Tangens wieder abnimmt, wenn der Winkel wächst.

II. Zusatz: $\text{tang. } 0° = \text{tang. } 180° = \frac{r}{r}.0 = 0$;

$$\text{tang. } 90° = \text{tang. } 270° = \frac{r.r}{0} = \infty.$$

III. Zusatz: Entweder aus der Construction (Fig. 185.) oder aus der im Lehrsatze aufgestellten Gleichung, wenn man auf die Zeichen des Sinus und Cosinus

Rück-

Rücksicht nimmt, folgt, daß die Tangens im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweyten und vierten Quadranten hingegen negativ sey.

§. 302.

Lehrsatz:

$$\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cos. A}}.$$

Beweis:

1. Wenn der Winkel oder Bogen $A < 90°$ ist, z. B. der Bogen AD (Fig. 185.), so ist
2. $\triangle DEC \sim \triangle GAC$, mithin
3. $CE : CD = CA : CG$, das ist
   $\text{Cos. A} : r = r : \text{Sec. A}$, also
4. $\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cos. A}}$.
5. Für $A > 90°$ nehme man dessen Supplement B, so ist
6. $\text{Sec. B} = \frac{r^2}{\text{Cos. B}}$ (Nr. 4.).
7. Ferner ist $\text{Sec. A} = \text{Sec. B}$ (§. 299. IV. Zus.), eben so $\text{Cos. A} = \text{Cos. B}$ (§. 294. Zus.), folglich ist für $A > 90°$ ebenfalls
8. $\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cos. A}}$.

I. Zusatz: Die Secans eines Bogens oder Winkels steht mit dem Cosinus im umgekehrten Verhältnisse, sie

sie wächst also im ersten und dritten Quadranten mit dem Winkel, und nimmt im zweyten und vierten ab, wenn der Winkel oder Bogen zunimmt.

II. Zusatz: $\text{Sec. } 0° = \text{Sec. } 180° = \frac{r^2}{r}$; $\text{Sec. } 90° = \text{Sec. } 270° = \frac{r^2}{0} = \infty$.

III. Zusatz: Die Secans hat immer mit dem Cosinus einerley Zeichen, sie ist also im ersten und vierten Quadranten positiv, hingegen im zweyten und dritten negativ (§. 296. IV. Zus.).

§. 303.

Lehrsatz:

$$\text{Cot. } A = \frac{r^2}{\text{tang. } A} = \frac{r. \text{Cos. } A}{\text{Sin. } A}.$$

Beweis:

1. Für $A < 90°$ wie (Fig. 185.) den Bogen AD, oder Winkel ACD; ist AG ∦ CH, und AC ∦ HI, also
2. AGC = ICH; ACG = CIH, folglich $\triangle CAG \sim \triangle CHI$, mithin
3. AG : AC = CH : HI, das ist
   tang. A : r = r : cot. A, folglich
4. $\text{cot. } A = \frac{r^2}{\text{tang. } A}$
5. Ferner ist auch $\triangle DEC \sim \triangle CHI$, also
6. DE : CE = CH : HI, das ist
   Sin. A : Cos. A = r : cot. A, folglich
7. $\text{cot. } A = \frac{r. \text{Cos. } A}{\text{Sin. } A}$.

8.

8. Für $A > 90°$ nehme man dessen Supplement B, so ist

9. $\cot. B = \frac{r^2}{\text{tang. } B}$ (Nr. 4.) $= \frac{r. \text{Cos. } B}{\text{Sin. } B}$ (Nr. 7.).

10. Nun ist aber Sin. A = Sin. B (§. 292. IV. Zus.), Cos. A = Cos. B (§. 294. Zus.), tang. A = tang. B (§. 299. IV. Zus.), endlich cot. A = cot. B (§. 298. II. Zus.), folglich

11. gelten die Nr. 4. und 7. angeführten Gleichungen für jede Größe von A.

I. Zusatz: Die Cotangens steht mit der Tangens im umgekehrten Verhältnisse, und hat mit ihr einerley Zeichen.

II. Zusatz: Die Cotangenten zweyer Bögen oder Winkel A, C verhalten sich gegeneinander umgekehrt wie ihre Tangenten. Denn $\cot. A = \frac{r^2}{\text{tang. } A}$; $\cot. C = \frac{r^2}{\text{tang. } C}$, also $\cot. A : \cot. C = \frac{r^2}{\text{tang. } A} : \frac{r^2}{\text{tang. } C} = \text{tang. } C : \text{tang. } A$.

§. 304.

Lehrsatz:

$$\text{Cosec. } A = \sqrt{(r^2 + \cot. A^2)} = \frac{r^2}{\text{Sin. } A}.$$

Beweis:

1. Wenn der Bogen oder Winkel $A < 90°$, wie der Bogen AD (Fig. 185.) oder der Winkel ACD ist, so ist offenbar

2. $CI^2 = CH^2 + HI^2$, das ist

3. Cosec. $A^2 = r^2 + \cot. A^2$.

4. Ferner ist $\triangle DEC \sim \triangle CHI$, mithin

5. $DE : CD = CH : CI$, das ist
Sin. A: r = r : cosec. A, folglich

6. Cosec. $A = \frac{r^2}{\text{Sin. } A}$.

7. Für $A > 90°$ nehme man dessen Supplement B, so ist

8. Cosec. $B^2 = r^2 + \cot. B^2$ (Nr. 3.), und
Cosec. $B = \frac{r^2}{\text{Sin. } B}$ (Nr. 5.).

9. Ferner ist Sin. A = sin. B (§. 292. IV. Zus.), cot. A = cot. B, und Cosec. A = Cosec. B. (§. 298. II. Zus.), folglich allgemein für jedes A wird

10. Cosec. $A^2 = r^2 + \cot. A^2$, also auch
Cosec. $A = \sqrt{(r^2 + \cot. A^2)} = \frac{r^2}{\text{Sin. } A}$ (Nr. 3, 5, und 7.).

I. Zusatz: Für jeden gegebenen Winkel A bildet die Cotangens den anliegenden, der Radius den gegenüberstehenden Catheten, und die Cosecans die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyeckes (§. 144.).

II. Zusatz: Die Cosecans steht im umgekehrten Verhältnisse zum Sinus, und hat mit ihm immer einerley Zeichen.

III. Zu-

III. Zusatz: Gleichen Bögen, oder Winkeln entsprechen in einem Kreise allemal gleiche Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. f. Denn für spitzige Winkel erhellet dieses aus §. 290. u. 298, und stumpfe sowohl als erhabene Winkel haben, mit ihrem spitzigen Supplemente gleiche Sinus, Cosinus u. s. w.

IV. Zusatz: Wenn man die trigonometrischen Linien für alle Winkel oder Bögen von 0° bis 90° weis, so weis man sie auch für alle Winkel oder Bögen von 90° bis 360°. Denn von letztern darf man nur die Supplemente nehmen, z. B. Sin. 124° = Sin. 56°; Sin. = 224 = Sin. 44°, Sin. 324 = Sin. 36°.

V. Zusatz: Will man die Betrachtung für Bögen, oder Winkel, die gröſser als ein ganzer Kreis oder 360° sind, fortsetzen, so leuchtet ein, daß im fünften Quadranten alle trigonometrischen Linien mit jenen des ersten einerley Gröſse und Lage haben, im sechsten Quadranten ist alles wie im zweyten, im siebenten, wie im dritten u. s. f.

§. 305.

Lehrsatz:

Für gleiche Winkel, oder ähnliche Bögen verhalten sich gleichnamige trigonometrische Linien in verschiedenen Kreisen wie die Radien dieser Kreise.

Beweis:

1. Wenn der Winkel, oder Bogen $< 90°$, wie (Fig. 185.) ACD = acd (Fig. 186.), oder die Bögen AD, ad, so ist

2. $\triangle DEC \sim \triangle dec$, $\triangle GAC \sim \triangle gac$, $\triangle HIC \sim \triangle hic$, folglich

3. $DE : de = CD : cd = CE : ce$
$AG : ag = CA : ca = CG : cg$
$HI : hi = CH : ch = CI : ci.$

4. Wenn die Winkel, oder Bögen $> 90°$ ſind, ſo haben ſie mit ihren ſpitzigen Supplementen gleiche Sinus, Coſinus u. ſ. f. (§. 304. III. Zuſ.), von welchen alſo alle dieſe angeführten Verhältniſſe gelten.

I. Zuſatz: Wenn *Sin. Cos. Tang. Cot.* die trigonometriſchen Linien für den Halbmeſſer R, und Sin. cos. tang. cot. für einen andern Halbmeſſer r bezeichnen, ſo iſt für jeden beliebigen Winkel oder Bogen A: *Sin.* A : ſin. A = R : r = *Cos.* A : cos. A = *Tang.* A : tang. A = *Sec.* A : ſec. A = *Cot.* A : cot. A = *Cosec.* A : coſec. A (Lehrſ.), folglich

$$\left.\begin{array}{l} Sin.\ A : R = \text{ſin. } A : r \\ Cos.\ A : R = \text{cos. } A : r \end{array}\right\} \text{(§. 213. Arithm.)},$$

das iſt: das Verhältniß trigonometriſcher Linien zum Halbmeſſer iſt für einen gegebenen Winkel oder Bogen A in allen Kreiſen einerley.

II. Zuſatz; Wenn man den Sinus, Coſinus u. ſ. f. eines Winkels A für den Halbmeſſer R weis, ſo ſind dieſe trigonometriſche Linien auch für den Halbmeſſer r bekannt; denn $\text{ſin. } A = \frac{r.\ Sin.\ A}{R}$; cos. A $= \frac{r.\ Cos.\ A}{R}$ u.ſ.f., und umgekehrt: $Sin.A = \frac{R.\text{ſin.}A}{r}$; $Cos.A = \frac{R.\text{cos.}A}{r}$ (I. Zuſ.).

III.

III. Zusatz: Für den Halbmesser $r = 1$, wird *Sin.* A $=$ R. sin. A, *Cos.* A $=$ R. cos. A, und umgekehrt:

$$\text{sin. A} = \frac{Sin.\,A}{R},\ \text{cos. A} = \frac{Cos.\,A}{R},\ \text{tang. A} = \frac{Tang.\,A}{R}$$

u. s. f.

IV. Zusatz: Das Verhältniß zweyer trigonometrischer Linien für den Halbmesser R ist allemal dem Verhältnisse gleichnamiger trigonometrischer Linien vom Halbmesser r gleich, das ist:

I. *Sin.* A : *Cos.* A = sin. A : cos. A.
II. *Sin.* A : *Sin.* B = sin. A : sin. B.
III. *Sin.* A : *Tang.* B = sin. A : tang. B u. s. w.

Denn *Sin.* A : R = sin. A : r
Cos. A : R = cos. A : r } (I. Zus.), mithin
I. *Sin.* A : *Cos.* A = sin. A : cos. A (§. 218. Arith.).

Eben so ist: *Sin.* A : R = sin. A : r
Sin. B : R = sin. B : r, folglich
II. *Sin.* A : *Sin.* B = sin. A : sin. B.

Endlich *Sin.* A : R = sin. A : r
Tang. B : R = tang. B : r, folglich
III. *Sin.* A : *Tang.* B = sin. A : tang. B.

II. Abschnitt.

Von den Verhältnissen der trigonometrischen Linien zusammengesetzter Bögen uund Winkeln für den Halbmesser 1.

§. 306.

Lehrsatz:

Wenn α, β zwey Bögen oder Winkel, und γ die Summe derselben bezeichnen, so ist für den Halbmesser 1:

$$\text{Sin. } \gamma = \text{sin.}(\alpha + \beta) = \text{Sin. } \alpha . \text{Cos. } \beta + \text{cos. } \alpha . \text{ sin. } \beta .$$

Beweis:

Für den I. Fall, wenn die einzelnen Bögen α, β sowohl, wie (Fig. 187.) AB, BD, als ihre Summe γ, nemlich der Bogen AD, kleiner als 90° ist.

1. Offenbar ist $\text{Sin. } \gamma = \text{sin.}(\alpha + \beta) = DF = DI + IF$.

2. $\triangle$ DGI $\sim$ $\triangle$ IFC $\sim$ $\triangle$ BEC, also

3. CE : CB = DG : DI, das ist:

$\text{Cos. } \alpha : 1 = \text{sin. } \beta : DI$,

4. $DI = \dfrac{\text{sin. } \beta}{\text{cos. } \alpha}$,

5. Ferner: CE : BE = DG : GI, das ist

$\text{Cos. } \alpha : \text{sin. } \alpha = \text{sin. } \beta : GI$, also

6. $GI = \dfrac{\text{Sin. } \alpha . \text{ sin. } \beta}{\text{Cos. } \alpha}$, mithin

7.

7. $CI = CG - GI = \text{Cos.}\,\beta - \frac{\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{cos.}\,\alpha}$

$= \frac{\text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta - \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{cos.}\,\alpha}$.

8. BC : BE = CI : IF, oder

$1 : \text{Sin.}\,\alpha = \frac{\text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta - \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{cos.}\,\alpha} : IF,$

alſo

9. $IF = \frac{\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta - \text{Sin.}\,\alpha^2.\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{cos.}\,\alpha}$.

10. Subſtituirt man die für DI (Nr. 4.), und IF (Nr. 9.) gefundenen Werthe in der Gleichung (Nr. 1.), ſo iſt

11. $\text{Sin.}\,\gamma = \text{Sin.}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{Sin.}\,\beta}{\text{cos.}\,\alpha}$

$+ \frac{\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta - \text{Sin.}\,\alpha^2.\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{cos.}\,\alpha}$

$= \frac{\text{Sin.}\,\beta\,(1 - \text{Sin.}\,\alpha^2) + \text{Sin.}\,\alpha.\text{Cos.}\,\alpha.\text{Cos.}\,\beta}{\text{cos.}\,\alpha}$

$= \frac{\text{Sin.}\,\beta.\,\text{Cos.}\,\alpha^2 + \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta}{\text{cos.}\,\alpha}$

(§. 296.)

$= \text{Sin.}\,\beta.\,\text{Cos.}\,\alpha + \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta$

$= \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\beta + \text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta.$

Beweis:

Für den II. Fall, wenn zwar die einzelnen Bögen α, β wie (Fig. 188.) AB, BD kleiner, hingegen ihre Summe γ, wie AD, größer als 90° ſind.

12.

12. Offenbar ist wieder Sin. $\gamma = (\alpha + \beta) = DF = DI + IF$.

13. Nun nehme den Bogen $ab = BH = 90° - AB$, so ist $be = \cos. \alpha$, und $Ce = \text{Sin.} \alpha$ (§. 287.).

14. Da ferner $ab + bD = 180° - AB - BD$,
und $ab = 90° - AB$ (Nr. 13.),
so ist $bD = 90° - BD$, mithin wie wieder $Dg = \cos. \beta$, und $Cg = \text{Sin.} \beta$.

15. $\triangle DIg \sim \triangle IFC \sim \triangle beC$, also

16. $Ce : Cb = Dg : DI$, das ist:
$\text{Sin.} \alpha : 1 = \cos. \beta : DI$, mithin

17. $DI = \frac{\text{Cos.} \beta}{\text{Sin.} \alpha}$.

18. $Ce : be = Dg : gI$, oder
$\text{Sin.} \alpha : \text{Cos.} \alpha = \text{Cos.} \beta : gI$, also

19. $gI = \frac{\text{Cos.} \alpha . \text{Cos.} \beta}{\text{Sin.} \alpha}$, und

20. $CI = Cg - gI = \text{Sin.} \beta - \frac{\text{Cos.} \alpha . \text{Cos.} \beta}{\text{Sin.} \alpha}$
$= \frac{\text{Sin.} \alpha . \text{Sin.} \beta - \text{Cos.} \alpha . \text{Cos.} \beta}{\text{Sin.} \alpha}$

21. $Cb : be = CI : IF$, oder
$1 : \text{Cos.} \alpha = \frac{\text{Sin.} \alpha . \text{Sin.} \beta - \text{Cos.} \alpha . \text{Cos.} \beta}{\text{Sin.} \alpha} : IF$,
also

22. $IF = \frac{\text{Cos.}\alpha.\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\beta - \text{Cos.}\alpha^2.\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\alpha}$,

mithin

23. Wenn man die Werthe von DI (Nr. 17.), und IF (Nr. 22.) in die Gleichung (Nr. 12.) substituirt, so ist

24. $\text{Sin.}\gamma = \text{Sin.}(\alpha+\beta) = \frac{\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\alpha}$

$$+ \frac{\text{Cos.}\alpha.\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\beta - \text{Cos.}\alpha^2.\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\alpha}$$

$$= \frac{\text{Cos.}\beta(1-\text{Cos.}\alpha^2) + \text{Cos.}\alpha.\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}\alpha}$$

$$= \frac{\text{Sin.}\alpha^2.\text{Cos.}\beta + \text{Cos.}\alpha.\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}\alpha}$$

$$= \text{Sin.}\alpha.\text{Cos.}\beta + \text{Cos.}\alpha.\text{Sin.}\beta.$$

I. Anmerkung: Man schränkt gemeiniglich den Beweis nur auf den ersten Fall ein, weil die vollständige Deduction und Construction der Figuren für alle übrigen Fälle zu weitläufig ist, und für jeden einzelnen Fall kann man sich leicht die nöthige Figur construiren; zur Erleichterung für den Anfänger habe ich noch im II. Falle einen davon angeführt, aus welchem sich leicht das Verfahren bey den Uebrigen abstrahiren läßt, man nimmt nemlich für Bögen, welche größer als 90° sind, ihre Complemente, oder Supplemente. Dieses gilt auch bey dem folgenden Lehrsatze.

II. Anmerkung: Will man obige Formel auf Bögen, welche größer als 90° sind, anwenden, so muß man

auf

auf die Zeichen, welche den trigonometrischen Linien dieser Bögen zukommen, die geeignete Rücksicht nehmen, z. B. die Sinus für die Bögen und Winkel von 0° bis 180° sind positiv, von 180° — 360° aber negativ u. s. f. Diese Bemerkung muß bey allen folgenden Formeln beobachtet werden.

I. Zusatz: $\text{Sin.}(2\alpha) = 2\,\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\alpha$; denn wenn man in der Formel des Lehrsatzes $\beta = \alpha$ setzet, so ist $\text{Sin.}(2\alpha) = \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\alpha + \text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\alpha = 2\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha$, mithin auch

II. Zusatz: $\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\alpha = \frac{1}{2}\,\text{Sin.}\,2\alpha$.

§. 307.

Lehrsatz:

$$\text{Sin.}\,\beta = (\gamma - \alpha) = \text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\gamma.\,\text{Sin.}\,\alpha.$$

Beweis (Fig. 187.).

1. $\triangle DGI \sim \triangle IFC \sim \triangle BEC$, also
2. $CI : CF = DI : DG$
3. $CE : CB = CF : CI$, das ist
   $\text{Cos.}\,\alpha : 1 = \text{Cos.}\,\gamma : CI$, mithin
4. $CI = \dfrac{\text{Cos.}\,\gamma}{\text{Cos.}\,\alpha}$
5. $CE : BE = CF : IF$, oder
   $\text{Cos.}\,\alpha : \text{Sin.}\,\alpha = \text{Cos.}\,\gamma : IF$, also
6. $IF = \dfrac{\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\gamma}{\text{Cos.}\,\alpha}$, und

7.

7. $DI = DF - IF = \text{Sin.}\,\gamma - \frac{\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\gamma}{\text{Cos.}\,\alpha}$

$$= \frac{\text{Sin.}\,\gamma.\,\text{Cos.}\,\alpha - \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\gamma}{\text{Cos.}\,\alpha}.$$

8. Subſtituirt man in der Proportion (Nr. 2.) die Werthe von CI (Nr. 4.), und DI (Nr. 7.), ſo wird

9. $\frac{\text{Cos.}\,\gamma}{\text{Cos.}\,\alpha} : \text{Cos.}\,\gamma = \frac{\text{Sin.}\,\gamma.\,\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\gamma.\,\text{Sin.}\,\alpha}{\text{Cos.}\,\alpha} :$

$\text{Sin.}\,\beta$, folglich

10. $\text{Sin.}\,\beta = \text{Sin.}\,(\gamma - \alpha)$

$$= \frac{\text{Cos.}\,\gamma.\,(\text{Sin.}\,\gamma.\,\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\alpha)}{\text{Cos.}\,\alpha} \times \frac{\text{Cos.}\,\alpha}{\text{Cos.}\,\gamma}$$

$$= \text{Sin.}\,\gamma.\,\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\gamma.\,\text{Sin.}\,\alpha.$$

I. Zuſatz: Bezeichnen alſo α, β zwey Bögen, oder Winkel, und zwar α den gröſſern, ſo iſt für den Halbmeſſer 1

$\text{Sin.}\,(\alpha + \beta) = \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta + \text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta$ (§. 306.)

$\text{Sin.}\,(\alpha - \beta) = \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta - \text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta$ (Lehr.), alſo

II. Zuſatz: $\text{Sin.}\,(\alpha + \beta) + \text{Sin.}\,(\alpha - \beta) = 2\,\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta$, und

III. Zuſatz: $\text{Sin.}\,(\alpha + \beta) - \text{Sin.}\,(\alpha - \beta) = 2\,\text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta$.

§. 308.

§. 308.

Lehrsatz:

$\text{Cos.}\gamma = \text{Cos.}(\alpha+\beta) = \text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta - \text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\beta.$

Beweis:

1. Man setze der Kürze wegen $\text{Sin.}\alpha = m$, $\text{Cos.}\alpha = \mu$, $\text{Sin.}\beta = d$, $\text{Cos.}\beta = \delta$, $\text{Sin.}\gamma = s$, $\text{Cos.}\gamma = \sigma$, so ist, wenn wieder der Halbmesser $= 1$ genommen wird,

2. $1 = m^2 + \mu^2$ (§. 296.)

3. $s = m\delta + \mu d$ (§. 306.), also

   $s^2 = m^2\delta^2 + 2m\delta\mu d + \mu^2 d^2$ (§. 120. Arith.), mithin

4. $\sigma^2 = 1 - s^2$ (§. 296.)
   $= m^2 - m^2\delta^2 - 2m\delta\mu d + \mu^2 - \mu^2 d^2$
   $= m^2(1-\delta^2) - 2m\delta\mu d + \mu^2(1-d^2)$
   $= m^2 d^2 - 2m\delta\mu d + \mu^2\delta^2$ (§. 296.), folglich

5. $\sigma = \pm(md - \mu\delta)$ (§. 156. Arithm.). Es giebt also hier für σ zwey einander entgegengesetzte Werthe, nemlich $md - \mu\delta$, und $\delta\mu\delta - md$.

6. Die Beschaffenheit von $\alpha+\beta$, oder von γ muß also bestimmen, welcher von den beyden Werthen wirklich zu nehmen sey.

7. Setzet man, α, β sowohl als ihre Summe γ spitzig, so ist σ positiv (§. 296. IV. Zus.), und

da

da also $\alpha+\beta < 90°$, so ist die Summe ihrer Complemente $> 90°$, mithin $\mu\delta > md$, folglich $\mu\delta - md$ positiv, oder der Werth von σ; das ist:

8. $\sigma = \mu\delta - md$, oder

$\text{Cos.}\gamma = \text{Cos.}(\alpha+\beta) = \text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta - \text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\beta.$

I. Zusatz: Setzet man $\beta = \alpha$, so wird

1. $\text{Cos.}2\alpha = \text{Cos.}\alpha^2 - \text{Sin.}\alpha^2.$

2. $= 1 - \text{Sin.}\alpha^2 - \text{Sin.}\alpha^2 = 1 - 2\,\text{Sin.}\alpha^2$

3. $= \text{Cos.}\alpha^2 - (1 - \text{Cos.}\alpha^2) = 2\,\text{Cos.}\alpha^2 - 1.$

II. Zusatz: Aus letzten beyden Gleichungen erhält man durch Ueberſetzung:

1. $\text{Sin.}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cos.}2\alpha}{2}\right)}$

2. $\text{Cos.}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{Cos.}2\alpha}{2}\right)}$

3. $\text{tang.}\alpha = \frac{\text{Sin.}\alpha}{\text{Cos.}\alpha}$ (§. 301.) $= \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cos.}2\alpha}{1 + \text{Cos.}2\alpha}\right)}$

III. Zusatz: Substituirt man im I. Zusatze statt 2α den Winkel oder Bogen φ, so ist

1. $\text{Cos.}\varphi = 1 - 2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi^2.$

2. $= 2\,\text{Cos.}\frac{1}{2}\varphi^2 - 1.$

IV. Zusatz: Eben so folgt aus dem II. Zusatze:

1. $\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cos.}\varphi}{2}\right)}$

2.

2. $\text{Cos.}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1+\text{Cos.}\varphi}{2}\right)}$

3. $\text{tang.}\frac{1}{2}\varphi = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}\varphi}{\text{Cos.}\frac{1}{2}\varphi} = \sqrt{\left(\frac{1-\text{Cos.}\varphi}{1+\text{Cos.}\varphi}\right)}$.

V. Zusatz: $\text{Sin.}3\alpha = 3\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Cos.}\alpha^2 - \text{Sin.}\alpha^2$. Denn man setze in der Gleichung (§. 306.) $\beta = 2\alpha$, so ist

$\text{Sin.}3\alpha = \text{Sin.}\alpha.\text{Cos.}2\alpha + \text{Cos.}\alpha\,\text{Sin.}2\alpha$

$= \text{Sin.}\alpha(\text{Cos.}\alpha^2 - \text{Sin.}\alpha^2) + \text{Cos.}\alpha.\text{Sin.}2\alpha$

$\text{Cos.}\alpha$ (I. Zus. u. §. 306. I. Zus.).

$= \text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha^2 - \text{Sin.}\alpha^3 + \text{Cos.}\alpha^2.2\text{Sin.}\alpha$

$= 3\,\text{Sin.}\alpha.\,\text{Cos.}\alpha^2 - \text{Sin.}\alpha^3$.

VI. Zusatz: $\text{Cos.}3\alpha = \text{Cos.}\alpha^3 - 3\,\text{Cos.}\alpha\,\text{Sin.}\alpha^2$. Denn man setze im Lehrsatze $\beta = 2\alpha$; so ist

$\text{Cos.}3\alpha. = \text{Cos.}\alpha.\,\text{Cos.}2\alpha - \text{Sin.}\alpha.\,\text{Sin.}2\alpha$

$= \text{Cos.}\alpha\,(\text{Cos.}\alpha^2 - \text{Sin.}\alpha^2) - \text{Sin.}\alpha\,2\,\text{Sin.}\alpha$

$\text{Cos.}\alpha$ (I. Zus. u. §. 306. I. Zus.).

$= \text{Cos.}\alpha^3 - \text{Cos.}\alpha.\,\text{Sin.}\alpha^2 - 2\,\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}\alpha^2$

$= \text{Cos.}\alpha^3 - 3\,\text{Cos.}\alpha.\,\text{Sin.}\alpha^2$.

VII. Zusatz: $\frac{\text{Cos.}\alpha + \text{Sin.}\alpha}{\text{Cos.}\alpha - \text{Sin.}\alpha} = \text{tang.}(45^\circ + \alpha)$. Denn

$\text{Sin.}(45^\circ + \alpha) = \text{Sin.}45^\circ.\,\text{Cos.}\alpha + \text{Cos.}45^\circ.\,\text{Sin.}\alpha$ (§. 306.),

$= \text{Sin.}45^\circ\,(\text{Cos.}\alpha + \text{Sin.}\alpha)$, weil $\text{Sin.}45^\circ = \text{Cos.}45^\circ$ ist.

Cos.

$$\text{Cos.}(45^\circ + \alpha) = \text{Cos. } 45^\circ \text{ Cos. } \alpha - \text{Sin. } 45^\circ \text{. Sin. } \alpha$$

(Lehrs.),

$$= \text{Sin. } 45^\circ (\text{Cos. } \alpha - \text{Sin. } \alpha), \text{ mithin}$$

$$\frac{\text{Sin.}(45^\circ + \alpha)}{\text{Cos.}(45^\circ + \alpha)} = \text{tang.}(45^\circ + \alpha) \text{ (§. 301.)}$$

$$= \frac{\text{Cos. } \alpha + \text{Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \alpha - \text{Sin. } \alpha}.$$

§. 309.

Lehrsatz:

$$\text{Cos. } \beta = \text{Cos.}(\gamma - \alpha) = \text{Cos. } \alpha \text{. Cos. } \gamma + \text{Sin. } \alpha \text{. Sin. } \gamma,$$

Beweis:

1. Man setze wieder $\text{Sin. } \alpha = m$, $\text{Cos. } \alpha = \mu$, $\text{Sin. } \gamma = s$, $\text{Cos. } \gamma = \sigma$, $\text{Sin.}(\gamma - \alpha) = \text{Sin. } \beta = d$, $\text{Cos.}(\gamma - \alpha) = \text{Cos. } \beta = \delta$, so ist
2. $1 = s^2 + \sigma^2$ (§. 296.).
3. $d = \mu s - m\sigma$ (§. 307.), also $d^2 = \mu^2 s^2 - 2\mu s m \sigma + m^2 \sigma^2$.
4. $1 - d^2 = \delta^2 = s^2 - \mu^2 s^2 + 2\mu s m \sigma + \sigma^2 - m^2 \sigma^2$
   $= s^2(1 - \mu^2) + 2\mu s m \sigma + \sigma^2 (1 - m^2)$
   $= m^2 s^2 + 2\mu s m \sigma + \mu^2 \sigma^2$, folglich
5. $\delta = \mu\sigma + ms$, das ist

$$\text{Cos. } \beta = \text{Cos.}(\gamma - \alpha) = \text{Cos. } \alpha \text{. Cos. } \gamma + \text{Sin. } \alpha \text{. Sin. } \gamma.$$

I. Zusatz: Wenn α, β zwey Bögen oder Winkel bezeichnen, und zwar α den größern, so ist

Cos.

$\cos.(\alpha-\beta)=\cos.\alpha.\cos.\beta+\sin.\alpha.\sin.\beta$ (Lehr.).

$\cos.(\alpha+\beta)=\cos.\alpha.\cos.\beta-\sin.\alpha.\sin.\beta$ (§. 308.), folglich

II. Zusatz; $\cos.(\alpha-\beta)+\cos.(\alpha+\beta)=2\cos.\alpha.\cos.\beta$, und

III. Zusatz: $\cos.(\alpha-\beta)-\cos.(\alpha+\beta)=2\sin.\alpha.\sin.\beta$.

IV. Zusatz: $\sin.\alpha.\sin.(\alpha+\beta)+\cos.\alpha.\cos.(\alpha+\beta)=\cos.\beta$.

Denn $\sin.\alpha.\sin.(\alpha+\beta)=\sin.\alpha^2\cos.\beta+\sin.\alpha\cos.\alpha\sin.\beta$ (§. 307. I. Zus.); $\cos.\alpha.\cos(\alpha+\beta)=\cos.\alpha^2\cos.\beta-\sin.\alpha\cos.\alpha\sin.\beta$ (I. Zus.), also

$\sin.\alpha\sin.(\alpha+\beta)+\cos.\alpha.\cos.(\alpha+\beta)=\cos.\beta\times(\sin.\alpha^2+\cos.\alpha^2)=\cos.\beta$ (§. 296.).

§. 310.

Lehrsatz:

$$\text{tang.}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tang.}\alpha+\text{tang.}\beta}{1-\text{tang.}\alpha.\text{tang.}\beta}.$$

Beweis:

1. $\text{tang.}(\alpha+\beta)=\frac{\sin.(\alpha+\beta)}{\cos.(\alpha+\beta)}$ (§. 301.)

$=\frac{\sin.\alpha.\cos.\beta+\cos.\alpha.\sin.\beta}{\cos.\alpha.\cos.\beta-\sin.\alpha.\sin.\beta}$ (§. 306 u. 309 I. Zus.).

2.

2. Man dividire sowohl den Zähler, als den Nenner des letzten Bruches (§. 74. VII. Zus. Arithm.) mit Cos. α. Cos. β, das ist:

3. $(\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta + \text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta) : \text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta$

$= \frac{\text{Sin.}\,\alpha}{\text{Cos.}\,\alpha} + \frac{\text{Sin.}\,\beta}{\text{Cos.}\,\beta} = \text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\beta.$

(§. 301.)

4. $(\text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta - \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta) : \text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta$

$= 1 - \frac{\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta} = 1 - \text{tang.}\,\alpha.\,\text{tang.}\,\beta,$

folglich

5. $\text{tang.}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\beta}{1 - \text{tang.}\,\alpha.\,\text{tang.}\,\beta}.$

I. Zusatz: Setzet man $\beta = \alpha$, so wird

$\text{tang.}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang.}\,\alpha^2}.$

II. Zusatz: $\text{tang.}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{tan.}\,\alpha - \text{tang.}\,\beta}{1 + \text{tang.}\,\alpha.\,\text{tang.}\,\beta}$. Denn

$\text{tang.}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)}{\text{Cos.}\,(\alpha-\beta)}$

$= \frac{\text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta - \text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{Cos.}\,\alpha.\,\text{Cos.}\,\beta + \text{Sin.}\,\alpha.\,\text{Sin.}\,\beta}$ (§. 307. I. Zus.) (§. 309. I. Zus.).

Dividirt man wieder sowohl den Zähler, als den Nenner dieses letzten Bruches mit Cos. α. Cos. β, so erhält man wie im Lehrsatze die aufgestellte Formel.

§. 311.

Lehrsatz:

I. $\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{tang.}\,2\alpha}{\text{sec.}\,2\alpha + 1}$

II. $= \frac{\text{sec.}\,2\alpha - 1}{\text{tang.}\,2\alpha}$.

Beweis:

1. $\text{Sec.}\,2\alpha = \frac{1}{\text{Cos.}\,2\alpha}$ (§. 302.), also

2. $\text{Cos.}\,2\alpha = \frac{1}{\text{sec.}\,2\alpha}$, mithin

3. $1 - \text{Cos.}\,2\alpha = 1 - \frac{1}{\text{sec.}\,2\alpha} = \frac{\text{Sec.}\,2\alpha - 1}{\text{sec.}\,2\alpha}$, und

4. $1 + \text{Cos.}\,2\alpha = 1 + \frac{1}{\text{sec.}\,2\alpha} = \frac{\text{Sec.}\,2\alpha + 1}{\text{sec.}\,2\alpha}$, folglich

5. $\frac{1 - \text{Cos.}\,2\alpha}{1 + \text{Cos.}\,2\alpha} = \text{tang.}\,\alpha^2$ (§. 308. II. Zus. Nr. 3.)
$= \frac{\text{Sec.}\,2\alpha - 1}{\text{sec.}\,2\alpha + 1}$.

6. Nun multiplicire man vom letzten Bruche sowohl den Zähler, als Nenner mit $\text{Sec.}\,2\alpha + 1$, so ist

7. $\text{tang.}\,\alpha^2 = \frac{(\text{Sec.}\,2\alpha - 1)\,(\text{Sec.}\,2\alpha + 1)}{\text{Sec.}\,(2\alpha + 1)^2}$
$= \frac{\text{Sec.}\,2\alpha^2 - 1}{(\text{sec.}\,2\alpha + 1)^2}$ (§. 103. Zus. Nr.) $= \frac{\text{tang.}\,2\alpha^2}{(\text{Sec.}\,2\alpha + 1)^2}$ (§. 300.), folglich

8.

8. $\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{tang.}\,2\alpha}{\text{Sec.}\,2\alpha + 1}$ Nr. I.

9. Man multiplicire wieder sowohl den Zähler, als Nenner des letzten Bruches Nr. 5. mit $\text{Sec.}\,2\alpha - 1$, so ist

10. $\text{tang.}\,\alpha^2 = \frac{(\text{Sec.}\,2\alpha - 1)^2}{(\text{Sec.}\,2\alpha + 1)(\text{Sec}\,2\alpha - 1)}$

$= \frac{(\text{Sec.}\,2\alpha - 1)^2}{\text{Sec.}\,2\alpha^2 - 1} = \frac{(\text{Sec.}\,2\alpha - 1)^2}{\text{tang.}\,2\alpha^2}$; folglich

11. $\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{Sec.}\,2\alpha - 1}{\text{tang.}\,2\alpha}$ Nr. II.

I. Zusatz: Setzet man $\varphi = 2\alpha$; so wird

1. $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\varphi = \frac{\text{tang.}\,\varphi}{\text{Sec.}\,\varphi + 1}$;

2. $= \frac{\text{Sec.}\,\varphi - 1}{\text{tang.}\,\varphi}$;

II. Zusatz: $\text{tang.}\,\alpha = \text{cosec.}\,2\alpha - \text{cot.}\,2\alpha$. Denn

$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{Sec.}\,2\alpha - 1}{\text{tang.}\,2\alpha}$ (Lehrs. II.) $\frac{\text{Sec.}\,2\alpha}{\text{tang.}\,2\alpha}$

$= \frac{1}{\text{tang.}\,2\alpha} = \frac{1}{\text{Cos.}\,2\alpha} \times \frac{\text{Cos.}\,2\alpha}{\text{Sin.}\,2\alpha} - \text{cot.}\,2\alpha$

(§. 301—303.) $= \frac{1}{\text{Sin.}\,2\alpha} - \text{cot.}\,2\alpha = \text{cosec.}\,2\alpha$

$= \text{cot.}\,2\alpha$ (§. 304.).

III. Zuſatz: $\cot.\alpha = \operatorname{cosec.} 2\alpha + \cot. 2\alpha$. Denn

$$\cot.\alpha = \frac{1}{\tang.\alpha} = \frac{\operatorname{Sec.} 2\alpha + 1}{\tang. 2\alpha} \text{ (Lehr. I.)} = \frac{\operatorname{Sec.} 2\alpha}{\tang. 2\alpha} + \frac{1}{\tang. 2\alpha} = \operatorname{cosec.} 2\alpha + \cot. 2\alpha.$$

IV. Zuſatz: Setzet man $\varphi = 2\alpha$, ſo wird

1. $\tang. \frac{1}{2}\varphi = \operatorname{cosec.}\varphi - \cot.\varphi$ (II. Zuſ.).
2. $\cot. \frac{1}{2}\varphi = \operatorname{cosec.}\varphi + \cot.\varphi$ (III. Zuſ.).

V. Zuſatz: $\tang.\alpha + \cot.\alpha = \frac{2}{\operatorname{Sin.} 2\alpha}$. Denn

$\tang.\alpha = \operatorname{cosec.} 2\alpha - \cot. 2\alpha$ (II. Zuſ.).

$\cot.\alpha = \operatorname{cosec.} 2\alpha + \cot. 2\alpha$ (III. Zuſ.), folglich

$\tang.\alpha + \cot.\alpha = 2\operatorname{cosec.} 2\alpha = 2.\frac{1}{\operatorname{Sin.} 2\alpha}$ (§. 304.).

§. 312.

Lehrſatz:

$$\operatorname{Sec.}\varphi - 1 = \frac{2\operatorname{Sin.}\frac{1}{2}\varphi^2}{\operatorname{Cos.}\varphi}.$$

Beweis:

1. $\operatorname{Cos.}\varphi = 1 - 2\operatorname{Sin.}\frac{1}{2}\varphi^2$ (§. 308. III. Zuſ. 1.), alſo $1 - \operatorname{Cos.}\varphi = 2\operatorname{Sin.}\frac{1}{2}\varphi^2$, und
2. $\frac{1 - \operatorname{Cos.}\varphi}{\operatorname{Cos.}\varphi} = \frac{2\operatorname{Sin.}\frac{1}{2}\varphi^2}{\operatorname{Cos.}\varphi}$.
3. Nun iſt $\operatorname{Sec.}\varphi - 1 = \frac{1}{\operatorname{Cos.}\varphi} - 1$ (§. 302.) $= \frac{1 - \operatorname{Cos.}\varphi}{\operatorname{Cos.}\varphi}$; folglich
4. $\operatorname{Sec.}\varphi - 1 = \frac{2\operatorname{Sin.}\frac{1}{2}\varphi^2}{\operatorname{Cos.}\varphi}$.

III.

III. Abschnitt.

Von trigonometrischen Tabellen.

§. 313.

Aufgabe:

Für den Halbmesser 1, den Sinus des Winkels oder Bogens von 18° berechnen.

I. Auflösung:

1. Man stelle sich ein reguläres Zehneck in den Kreis beschrieben, und AB als eine Seite desselben (Fig. 189.) vor, so ist

2. der Centriwinkel $n = \frac{360°}{10} = 36°$ (§. 123. III. Zus.), der halbe Polygonswinkel $m = \frac{1}{2}(180° - 36)$ (§. 123. I. u. V. Zus.) $= 90° - 18° = 72°$. mithin

3. $m = 2n$.

4. Man verlängere nun AB um BD = BC, und ziehe CD, so ist

5. $m = 2r$ (§. 47. VIII. Zus.), also $2n = 2r$, und

6. $n = r$; BAC = DAC, also $\triangle BAC \sim \triangle DAC$, mithin

7. AC : AB = AD : AC.

8. Setzet man nun den Radius AC = 1, die Sehne AB = x, so verwandelt sich diese Proportion in nachstehende:

$1 : x = 1 + x : 1$, folglich

9. $x^2 + x = 1$ (§. 210. IV. Zuſ. Arithm.), und

10. $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (§. 159. Arithm.) $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

11. Es iſt aber $\frac{1}{2}x = \text{Sin.}\frac{36^\circ}{2}$ (§. 290. I. Zuſ.) $= \text{Sin.}\,18^\circ$, folglich

12. $\text{Sin.}\,18^\circ = \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1{,}2360680}{4}$
$= 0{,}3090170.$

I. Zuſatz. $\text{Cos.}\,18^\circ = \sqrt{(1-(\text{Sin.}\,18^\circ)^2)} = 0{,}9510565.$

II. Zuſatz: $\text{Sin.}\,15^\circ = \text{Sin.}\frac{1}{2}30^\circ = \sqrt{\left(\frac{1-\text{Cos.}\,30^\circ}{2}\right)}$

(§. 308. IV. Zuſ. Nr. 1.), $= \sqrt{\left(\frac{1-0{,}8660254}{2}\right)}$

(§. 296. II. Zuſ.), $= \sqrt{0{,}0669873} = 0{,}2588190.$

III. Zuſatz: $\text{Cos.}\,15^\circ = \text{Cos.}\frac{1}{2}30^\circ = \sqrt{\left(\frac{1+\text{Cos.}\,30^\circ}{2}\right)}$

(§. 308. IV. Zuſ. Nr. 2.) $= \sqrt{\left(\frac{1+0{,}8660254}{2}\right)}$

(§. 296. II. Zuſ.) $= \sqrt{0{,}9330127} = 0{,}9659258.$

§. 314.

Aufgabe:

Für den Halbmeſſer 1 den Sinus eines Bogens, oder Winkels von einer Minute, das iſt, $\text{Sin.}\,1'$ zu finden.

Auflöſung:

1. $\text{Sin.}\,3^\circ = \text{Sin.}\,(18^\circ - 15^\circ) = \text{Sin.}\,18^\circ.\,\text{Cos.}\,15^\circ - \text{Cos.}\,18^\circ.\,\text{Sin.}\,15^\circ$ (§. 307.).

2.

2. Substituirt man nun aus §. 313. die Werthe von diesen Sinusen und Cosinusen, so findet man

3. $\text{Sin. } 3^\circ = 0{,}0523360$.

4. $\text{Cos. } 3^\circ = \sqrt{(1-(\text{Sin. } 3^\circ)^2)}$ (§. 296.) $= 0{,}9986295$.

5. Aus letztern Sin. 3° und Cos. 3° läßt sich nach §. 308. IV. Zus. Sin. $\frac{3}{2}^\circ$ und Cos. $\frac{3}{2}^\circ$, und aus diesen aufs Neue

6. $\text{Sin. } \frac{3^\circ}{4} = \text{Sin. } 45'$, und $\text{Cos. } \frac{3}{4}^\circ = \text{Cos. } 45'$ bestimmen.

7. Nach der nemlichen Anleitung kann man ferner die Sinus und Cosinus von $\frac{45'}{2}$, $\frac{45'}{4}$, $\frac{45'}{8}$, $\frac{45'}{16}$, $\frac{45'}{32}$, $\frac{45'}{64}$, bestimmen.

8. Nun findet man nach dieser Berechnung

$\text{Sin. } \frac{45'}{32} = 0{,}000409061532$, und

$\text{Sin. } \frac{45'}{64} = 0{,}000204530 77$.

9. Diese beyden Sinus verhalten sich aber wie die Bögen oder Winkel selbst, das ist:

$0{,}000409061532 : 0{,}000204530 77 = \frac{45'}{32} : \frac{45'}{64}$

$= 2 : 1$.

10. Man sucht also den Sinus von 1′ nach der Regel Detri: $\frac{45'}{64} : 1' = 0{,}000204530 77 : \text{Sin. } 1'$, folglich

11.

11. $\text{Sin. } 1' = \frac{0{,}00020453077 \times 64}{45}$

$= 0{,}00029088820 = 0{,}0002909$, wenn man solchen nur bis auf 7 Decimalstellen bestimmen will.

I. Zusatz: $\text{Cos. } 1' = \sqrt{(1-(\text{Sin. } 1')^2)} = 1$ beynahe.

II. Zusatz: Aus Sin. 1′ und Cos. 1′ lassen nach §. 306. und §. 296. alle Sinns und Cosinus von Minute zu Minute bis 90° bestimmen.

III. Zusatz: Aus den Sinusen und Cosinusen lassen sich endlich aus §§. 301, 302, 303, 304, und 297 die Tangenten, Secanten, Cotangenten, Cosecanten, und Quersinus berechnen.

Anmerkung: Diese beyden vorhergehenden §§. haben nicht den Zweck, die wirkliche Berechnung auf diese Art aufs Neue vorzunehmen; denn alle diese Linien sind schon in eigenen Tabellen bestimmt vorhanden, sondern nur die Möglichkeit solcher Berechnungen, und die Methode zu zeigen, welche die Elementarmathematik zu diesem Behufe darbiethet.

§. 315.

Erklärung:

Tabellen, in welchen für jeden Winkel oder Bogen die Verhältnisse trigonometrischer Linien zu einem bestimmten Halbmesser angegeben werden, heißen trigonometrische Tafeln.

I. Zu-

I. Zusatz: Da die trigonometrischen Linien für stumpfe und erhabene Winkel jenen der Supplemente gleich sind (§. 304. IV. Zus.), so erstrecken sich die Angaben nur auf Winkel und Bögen von 0° bis 90°.

II. Zusatz: In den vorhandenen trigonometrischen Tabellen wurde der Halbmesser = 10000000000 angenommen, und da bey so großen Zahlen die Rechnung mit Logarithmen beynahe unentbehrlich ist, so sind in den Tabellen allemal die Logarithmen der trigonometrischen Linien angeführt, daher ist log. r = 10.

III. Zusatz: In den meisten Tabellen vermißt man die Angabe der Linien selbst, weil man fast immer nur mit Logarithmen rechnet; und wenn sie in einigen größern Tabellen angeführt sind, so wird gewöhnlich der Radius 1 gesetzt, und von den Linien selbst die treffenden Zahlen nur bis auf 7 Decimalstellen angezeigt.

IV. Zusatz: Will man also aus den angeführten Logarithmen die trigonometrischen Linien bestimmen (§. 247. u. 248. Arithm.), so muß man erst die Charakteristik um 3 vermindern, dann findet man solche für den Radius = 10000000, oder im Falle man die alte Characteristik beybehält, so ist die Bestimmung der letzten 3 Ziffer unrichtig.

V. Zusatz: Will man hingegen diese Linien auf den Halbmesser 1 bringen, so muß man am Ende so

viele

viele Decimalstellen in der gefundenen Zahl abschneiden, als die Charakteristik vom Logarithmus des Radius Einheiten enthält, also 10.

Anmerkung: Für die gewöhnliche Kreiseintheilung habe ich die merkwürdigsten Tabellen schon angezeigt (§. 234. Anm. Arithm.). Für die neue Kreiseintheilung (§. 66. Anm.) sind nachstehende Tabellen vorhanden;

Neue trigonometrische Tafeln für die Decimaleintheilung des Quadranten, berechnet von F. Ph. Hobert und Ludwig Ideler. Berlin 1799 in 8vo.

§. 316.

Aufgabe;

Ein Winkel oder Bogen A sey in Graden und Minuten gegeben, der Logarithmus seines Sinus aus den Tabellen anzugeben.

Auflösung;

I. Wenn $A < 45°$, z. B. für $A = 24°, 36'$.

Man schlage jene Seite auf, wo in der obersten horizontalen Spalte die Grade von A, nemlich 24°, vorkommen, auf eben dieser Seite suche man in der ersten senkrechten Columne die Minuten von A, gegenwärtig 36′, so steht neben letztern in der Spalte, unter der Aufschrift log. Sin., der verlangte Logarithmus, so ist

$$\log. \sin. 24°36' = 9{,}6193864.$$

II.

II. Wenn A zwar spitzig, aber $>45°$ ist, wie z. B. $57°49'$.

In den Tabellen von Schulze, oder Vega schlage man jene Seite auf, wo in der untersten horizontalen Spalte die Grade von A, z. B. $57°$ stehen, und suche in der letzten senkrechten Reihe aufwärts die gegebenen Minuten von A z. B. $49'$, so findet man dabey in jener Spalte, welche unten die Aufschrift log. Sin. hat, den verlangten Logarithmus z. B. log. Sin. $57°49' = 9{,}9275490$.

In kleinern z. B. Vlacquischen Tabellen findet man diesen Logarithmus wie im I. Falle.

III. Wenn $A > 90°$ ist, z. B. für $A = 145°43'$. Man suche das Supplement von A, und bestimme nach I. oder II. den Logarithmus seines Sinus; so ist

Log. Sin. $145°43' =$ log. sin. $34°17' = 9{,}7507287$.

Zusatz: Ganz auf die nemliche Art findet man den Logarithmus der Tangens eines in Graden und Minuten gegebenen Winkels, oder Bogens A aus den Tabellen.

§. 317.

Aufgabe:

Den Logarithmus vom Cosinus eines in Graden und Minuten gegebenen Winkels oder Bogens A aus den Tabellen anzugeben.

Auflösung:

I. Wenn $A < 45°$, z. B. $A = 24°.36'$.

Man schlage in den Tabellen von Schulze, Vega u. s. w. Den Winkel A z. B. von 24° auf, und suche in der ersten senkrechten Reihe die gegebenen Minuten also 36', so steht in der Columne, welche Oben die Aufschrift log. Cos. hat, der verlangte Logarithmus daneben, nemlich

log. Cos. $24°36' = 9\,9586767$.

In den kleinern Macquischen Tafeln haben die Cosinus keine eigene Spalte, man schlage also die Grade und Minuten von A, also 24°36' auf, auf der andern Seite in der nemlichen Columne steht dessen Complement 65°,24', mithin giebt der Logarithmus von dessen Sinus den verlangten.

II. Wenn A zwar spitzig, aber $> 45°$ z. B. $A = 57°49'$.

Bey kleinern Tabellen verfahre man ganz wie vorher Nr. 1. Bey größern Tabellen, wo für den Cosinus eigene Columnen ausgesetzet sind, schlage man jene Seite auf, wo auf der untersten horizontalen Spalte die Grade von A nemlich 57° stehen, die Minuten suche man in der letzten senkrechten Spalte, und nehme aus jener Columne, wo unten log. Cos. steht, den entsprechenden Logarithmus, z. B. log. Cos. $57°49' = 9{,}7264257$.

III. Wenn $A > 90°$, z. B. für $A = 145°43'$.

Man suche den Logarithmus vom Cosinus seines Supplementswinkels.

log. Cos. $145°43' =$ log. Cos. $34°17' = 9{,}9171179$.

I. Zusatz: Ganz auf die nemliche Art findet man den Logarithmus für die Cotangens eines in Graden und Minuten gegebenen Winkels oder Bogens A.

II. Zusatz: Aus dem Logarithmus des Sinus ist auch jener der Cosecans gegeben. Denn Cosec. $A = \frac{r^2}{\text{Sin.}A}$ (§. 304.), mithin log. Cosec. A = 2 log. r — log. Sin. A (§. 228. u. 229. Arithm.), z. B.

log. Cosec. 24°36′ = 20,0000000 — 9,6193864
= 10,3806136.

III. Zusatz: Aus dem Logarithmus des Cosinus ist jener der Secans bestimmt. Denn Sec. $A = \frac{r^2}{\text{Cos.}A}$ (§. 202.), mithin log. Sec. A = 2. log. r — log. Cos. A (§. 228. u. 229. Arithm.).

§. 318.

Aufgabe:

Zu dem gegebenen Logarithmus eines Sinus, den correspondirenden Winkel in Graden und Minuten anzugeben.

Auflösung:

1. Man suche den gegebenen Logarithmus in der Spalte: log. Sin. sowohl, als in der Spalte: log. Cos., wenn letztere in den Tabellen vorkömmt.

2. Findet man solchen unter den erstern, so giebt die obere horizontale Spalte die Grade, und die Zahl, welche in der ersten senkrechten Columne mit

mit dem gegebenen Logarithmus in einer Zeile steht, die Minuten des gesuchten Winkels an.

z. B. 9,8116554 = log. Sin. 40°24′.

3. Findet man aber den gegebenen Logarithmus in der Spalte, welche oben log. Cos. zur Aufschrift hat, so giebt die untere horizontale Spalte die Grade, und die mit dem Logarithmus in einer Zeile stehende Zahl der letzten senkrechten Columne die Minuten des gegebenen Winkels an,

z. B. 9,9529175 = log. Sin. 63°48′.

4. Trifft kein Logarithmus beyder Spalten mit dem gegebenen genau überein, so nimmt man jenen, welcher am nächsten kömmt, und bestimmt nach Nr. 2. u. 3. die Grade und Minuten des entsprechenden Winkels,

z. B. 9,6511957 kömmt in den Tabellen 9,6512966 am nächsten, mithin ist 26°37′ der gesuchte Winkel.

I. Zusatz: Eben so bestimmt man den Winkel in Graden und Minuten aus dem Logarithmus seiner Tangens.

II. Zusatz: Vermittels der Tafeln läßt sich auch der Winkel in Graden und Minuten bestimmen, wenn der Logarithmus der Cosecans gegeben ist. Denn

$\text{Cosec. } A = \frac{r^2}{\text{Sin. } A}$; $\text{Sin. } A \frac{r^2}{\text{Cosec. } A}$, also log.Sin.A $= 2.\log. r - \log. \text{Cosec. } A$, woraus sich A angeben läßt.

§. 319.

§. 319.

Aufgabe:

Den Winkel in Graden und Minuten bestimmen, welcher dem gegebenen Logarithmus des Cosinus entspricht.

Auflösung:

1. In den kleinern Vlacquischen Tabellen, wo für den Cosinus keine eigene Spalte vorkömmt, suche man den gegebenen unter den Logarithmen von Sinusen; findet sich solcher, so giebt die obere horizontale Spalte die Grade, und die in der nemlichen Zeile stehende Zahl der ersten horizontalen Spalte, die Minuten eines Winkels an, welcher das Complement vom gesuchten ist, z. B. log. Cos. A = 9,6098803; findet man in den Tafeln 9,6098803 = log. Sin. 24°2′; folglich ist A = 90° — 24°2′ = 65°58′.

2. In den Schulzischen, und Vegaischen Tabellen, suche man ohne Unterschiede den gegebenen Logarithmen sowohl in der Spalte, die oben die Aufschrift log. Cos. hat, als jener, wo log. Sin. steht.

3. Findet man solchen in der erstern Spalte log. Cos., so giebt die oben wagrecht stehende Spalte die Grade, und die mit dem Logarithmus in der ersten senkrechten Columne übereinstimmende Zahl die Minuten des gesuchten Winkels an, z. B. 9,9529175 = log. Cos. 26°12′.

4. Stimmt aber im Logarithmus der Spalte log. Sin. mit dem gegebenen überein, so giebt die untere horizontale Spalte die Grade, und die in letzten verticalen Columne übereinstimmende Zahl die Minuten des gesuchten Winkes an, z. B. 9,6597633 = log. Cos. 62°49'.

5. Kömmt der gegebene Logarithmus in keiner dieser Spalten genau vor, so wählet man jenen, der damit am nächsten übereinstimmt, und giebt dafür nach Nr. 1—4. die Grade und Minuten vom Winkel an, z. B. mit 9,8654682 stimmt in den Tabellen 9,8654192 = log. Cos. 42°49' am nächsten überein.

I. Zusatz: Auf die nemliche Art wird der Winkel aus dem gegebenen Logarithmus seiner Cotangens bestimmt.

II. Zusatz: Aus dem gegebenen Logarithmus der Secans läßt sich aus den Tabellen der Winkel finden. Denn $\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cos. A}}$; also $\text{Cos. A} = \frac{r^2}{\text{Sec. A}}$; folglich log. Cos. A = 2 log. r — log. Sec. A., woraus sich A bestimmen läßt.

III. Zusatz: Bey allen bisherigen Auflösungen in diesem und dem vorhergehenden §, wo nemlich aus dem gegebenen Logarithmus einer trigonometrischen Linie die Größe des entsprechenden Winkels gesucht wird, bleibt es für hohle Winkel noch unbestimmt,

ob

ob der bisher angenommene spitzige Winkel A, oder aber sein stumpfer Nebenwinkel 180° — A der wahre gesuchte sey (§. 304. IV. Zus.), es muß also allemal anderswoher schon bekannt seyn, ob der gesuchte Winkel spitzig oder stumpf ist.

IV. Zusatz: Um für Winkel, die in Graden, Minuten und Secunden gegeben sind, die entsprechenden Logarithmen ihrer trigonometrischen Linien zu finden, und umgekehrt für den Logarithmus einer trigonometrischen Linie den entsprechenden Winkel bis auf Secunden zu bestimmen, nimmt man von Winkeln, die sehr wenig unterschieden sind, an, daß ihre Unterschiede dem Unterschiede der Logarithmen ihrer trigonometrischen Linien proportionirt seyen, das ist, wenn A, B, C drey Winkel bezeichnet, die sehr wenig z. B. um einige Secunde von einander unterschieden sind, so nimmt man:

$$C - A : B - A = \log. \text{Sin. } C - \log. \text{Sin. } A : \log. \text{Sin. } B - \log. \text{Sin. } A$$
$$= \log. \text{tang. } C - \log. \text{tang. } A : \log. \text{tang. } B - \log. \text{tang. } A.$$

V. Zusatz: Vermög eben dieser Annahme ist also

$$C - A = B - A = \log. \cos. A - \log. \cos. C : \log. \text{Cos. } A - \log. \text{Cos. } B$$
$$= \log. \cot. A - \log. \cot. C : \log. \cot. A - \log. \cot. B.$$

Diese beyde Annahmen sind um so richtiger, je näher die Winkel 45° sind, hingegen für Winkel und Bögen der vier ersten und letzten Grade des Qua-

dranten ist die Abweichung von der Wahrheit etwas beträchtlicher, daher sind für solche Winkel in den Schulzischen und Vegaischen Tabellen die Logarithmen der trigonometrischen Linien bis auf einzelne Secunden und im Anfange noch genauer angegeben.

§. 320.

Aufgabe:

Den Logarithmus vom Sinus eines Winkels, welcher bis auf Secunden bestimmt ist, z. B. 30° 14′ 36″ aus den Tafeln zu finden.

Auflösung:

1. Man bezeichne den gegebenen Winkel mit B, den nächst kleinern der Tabelle, oder 30° 14′ mit A, und den nächst größern 30° 15′ mit C, so ist allemal C—A = 60″, und B—A der gegebenen Anzahl Secunden von B, hier also 36″ gleich.

2. Nun bestimme man aus den Tabellen die Logarithmen der Sinuse von C und A, und ziehe letztern vom ersten ab, das ist;

$$\log.\mathrm{Sin.}\,C = 9{,}7022357$$
$$\log.\mathrm{Sin.}\,A = 9{,}7020190, \text{ also}$$

$$\log.\mathrm{Sin.}\,C - \log.\mathrm{Sin.}\,A = 2167;$$

3. $60'' : 36'' = 2167 : \log.\mathrm{Sin.}\,B - \log.\mathrm{Sin.}\,A$ (§. 319. IV. Zus.), folglich

4. $\log.\mathrm{Sin.}\,B - \log.\mathrm{Sin.}\,A = \frac{2167.36}{60} = 1300,$

oder vielmehr $= 0{,}0001300$, folglich

5.

5. log. Sin. B = log. Sin. A + 0,0001300, das ist, man addire die gefundene Proportionalzahl zum Logarithmus vom Sinus des kleinern Winkels A der Tafel, so giebt die Summe den verlangten Logarithmus, oder

log. A = 9,7020190 = log. 30° 14′
1300

log. Sin. B = 9,7021490 = log. Sin. 30° 14′ 36″.

I. Zusatz: Auf die nemliche Art läßt sich der Logarithmus der Tangens dieses Winkels finden; so ist

log. tang. 30° 14′ 36″ = 9,7656885.

II. Zusatz: Um den Logarithmus des Cosinus von 30° 15′ 36″ zu bestimmen, nimmt man ebenfalls

log. Cos. A = log. Cos. 30° 14′ = 9,9365047
log. Cos. C = log. Cos. 30° 15′ = 9,9364311, mithin

log. Cos. A — log. Cos. C = 736, folglich wird 60″ : 36″ = 736 : log. Cos. A — log. Cos. B (§. 319. V. Zus.); also log. Cos. A — log. Cos. B = $\frac{736.36}{60}$ = $\frac{736.3}{5}$ = 442, folglich log. Cos. B = log. Cos. A — 442, das ist:

log. Cos. A = 9,9365047
442

log. Cos. B = 9,9364605 = log. Cos. 30° 15′ 36″.

III. Zusatz: Auf die nemliche Art wie im vorhergehenden Zusatze wird der Logarithmus von der Cotan-

gens eines Winkels gefunden, wenn letzterer bis auf Secunden bestimmt ist.

§. 321.

Aufgabe:

Für den gegebenen Logarithmus des Sinus, welcher mit keinen der Tafeln genau zusammentrifft, dessen Winkel bis auf Secunden zu bestimmen, z. B. aus log. Sin. B = 9,7076596 den Winkel B anzugeben.

Auflösung:

1. Man nehme aus der Spalte log. Sin. oder log. Cos. den nächst größern, und nächst kleinern, und ziehe letztern sowohl vom vorhergehenden als gegebenen Logarithmus ab, das ist:

2. log. Sin. C = 9,7078194 = log. Sin. 30° 41′
   log. Sin. A = 9,7076064 = log. Sin. 30° 40′, also

   log. Sin. C — log. Sin. A = 2130; und C — A = 1′ = 60″.

3. log. Sin. B = 9,7076596
   log. Sin. A = 9,7076064, also

   log. Sin. B — log. Sin. A = 532; folglich

4. 2130 : 532 = 60″ : B — A (§. 319. IV. Zus.), und

$$B - A = \frac{532 \times 60}{2130} = 15''; \text{ folglich}$$

5. B = A + 15″ = 30° 40′ 15″.

I. Zusatz: Auf die nemliche Art wird aus dem Logarithmus der Tangens dessen Winkel bestimmt.

II.

II. Zusatz: Aus den Logarithmen des Cosinus, oder Cotangens den Winkel anzugeben, stützet sich das Verfahren auf den V. Zus. vom 319ten §., und läßt sich aus den bisherigen Aufgaben leicht verstehen.

II. Hauptstück.

Die Ebene Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Von rechtwinklichten und gleichschenklichten Dreyecken.

§. 322.

Erklärungen:

a. Die Ausdrücke: Halbmesser, Sinus u. s. w. sowohl, als ihre Zeichen r, Sin., Cos, tang. u. s. w. beziehen sich bey trigonometrischen Rechnungen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, immer auf den Halbmesser der Tafeln (§. 315.), und auf die für diesen Halbmesser in den Tafeln berechneten Sinus, Cosinus, Tangens eines Winkels oder Bogens.

b. Zur Bezeichnung der drey Winkel und Seiten eines Dreyeckes nimmt man, so oft es angeht, zur Bequemlichkeit für erstere die großen, und für letztere die kleinen Buchstaben des Alphabethes, so daß ein Winkel, und ihre opponirte Seite den nemlichen Buchstaben haben. Z. B. (Fig. 190.) A, B, H bezeichnen die drey Winkel, und a, b, h der Ordnung nach ihre opponirten Seiten BH, AH, AB.

§. 323.

Lehrsatz:

Im rechtwinklichten Dreyecke verhält sich die Hypothenuse zu einer Seite, wie der Radius zum Sinus des der Seite opponirten, oder zum Cosinus des der Seite anliegenden Winkels, das ist (Fig. 190):

I. $h : a = r : \text{Sin. } A.$

II. $h : b = r : \text{Cos. } A.$

Beweis:

1. Man beschreibe aus A mit $AB = h$ einen Kreis, so ist

2. $h = R$, $a = \textit{Sin.}\, A$ (§. 284.), $b = \textit{Cos.}\, A$ (§. 295.), also

3. $\left.\begin{array}{l} R : \textit{Sin.}\, A = r : \text{Sin. } A \\ R : \textit{Cos.}\, A = r : \text{Cos. } A \end{array}\right\}$ (§. 305. I. Zus.), folglich

4. $\left.\begin{array}{l} \text{I. } h : a = r : \text{Sin. } A \\ \text{II. } h : b = r : \text{Cos. } A \end{array}\right\}$ (Nr. 2.).

I. Zu-

I. Zusatz: a : b = Sin. A : Cos. A (§. 218. Arithm.), das ist: im rechtwinklichten Dreyecke verhält sich ein Perpendikel zum andern, wie der Sinus des dem ersten Perpendikel entgegenstehenden Winkels, zum Cosinus eben dieses Winkels.

II. Zusatz: Da im rechtwinklichten Dreyecke ein schiefer Winkel das Complement vom andern ist (47. VI. Zus.), so ist auch h : a = r : Cos. B, und h : b = r : Sin. B (Lehrs.).

§. 324.

Lehrsatz:

Im rechtwinklichten Dreyecke verhält sich ein Perpendikel zum andern, wie der Radius zur Tangens des der letzten Seite opponirten, oder zur Cotangens des der letzten anliegenden Winkels, das ist (Fig. 191.):

I. b : a = r : tang. A
II. = r : cot. B.

Beweis:

1. Man beschreibe aus A mit AH = b einen Kreis, so ist

2. b = R, a = *Tang.* A (§. 285.) = *Cot.* B (§. 287.), also

3. R : *Tang.* A = r : tang. A
   R : *Cot.* B = r : cot. B
   } (§. 305. I. Zus.), folglich

4. I. b : a = r : tang. A
   II. b : a = r : cot. B
   } (Nr. 2.).

§. 325.

§. 325.

Aufgabe:

Wenn im rechtwinklichten Dreyecke nebst dem rechten Winkel zwey Stücke, worunter wenigst eine Seite ist, gegeben sind, die übrigen drey durch Rechnung zu finden.

Auflösung:

1. Wenn einer von den beyden schiefen Winkeln gegeben ist, so ist auch der andere bekannt (§. 47, VI. Zus.).

2. Aus zwey gegebenen Seiten läßt sich die dritte aus §. 97. berechnen. In andern Fällen

3. wenn das gesuchte Stück die Hypothenuse ist, oder wenn letztere gegeben ist, so geschieht die Auflösung aus §. 323.

4. Wenn aber das Gegentheil Statt hat, so wird das gesuchte aus §. 324. bestimmt.

§. 326.

Beyspiele zur Uebung.

I. Beyspiel:

Es sey (Fig. 190.) die Hypothenuse $b = 295$ Schuhe, und der Winkel $B = 53°8'$ gegeben, man sucht die übrigen zwey Seiten a, b und den andern spitzigen Winkel A.

Auflösung:

1. Da $H = 90°$ ohnehin bekannt ist, so ist

2.

2. $A = 90° - B$ (§. 47. IV. Zuſ.) $= 36°52'$.

3. $h : a = r : \text{Sin. } A$ (§. 323. I.), alſo

$a = \frac{h \cdot \text{Sin. } A}{r}$; nun iſt

4. log. h $=$ $=$ 2,4698220

log. Sin. A $=$ log. Sin. $36°52'$ $=$ 9,7781186

log. r $=$ 10,0000000 alſo

log. $a = \text{log.} \frac{h \cdot \text{Sin. } A}{r} =$ 2,2479406

$=$ log. 176,987, folglich

5. Die Seite a $=$ 177 Schuhe beynahe.

6. $b = \sqrt{(h^2 - a^2)}$ (§. 97.).

7. $h^2 = 87025$

$a^2 = 31329$

$b^2 = 55696$, folglich

8. $b = \sqrt{55696} = 236$ Schuhe.

9. Man kann auch b trigonometriſch finden; denn es iſt

$h : b = r : \text{Sin. } B = r : \text{Cos. } A$ (§. 323. I. u. II. Zuſ.),

alſo $b = \frac{h \cdot \text{Sin. } B}{r}$,

10. Nun iſt

log. h $=$ log. 295 $=$ 2,4698220

log. Sin. B $=$ log. Sin. $53°8'$ $=$ 9,9031084

log. r $=$ 10,0000000, alſo

log. $b = \text{log.} \frac{h \cdot \text{Sin. } B}{r} =$ 2,3729304

$=$ log. 236,01.

11. Folglich wieder b = 236 Schuhe.

II. Beyſpiel:

Aus den beyden Seiten a = 198 Schuhe, und b = 155 Schuhe, die Hypothenuſe h, und die beyden ſpitzigen Winkel A, B zu ſuchen.

Auflöſung:

1. b : a = r : tang. A (§. 224. I.), mithin

$$\text{tang. A} = \frac{r \cdot a}{b}$$

2. Nun iſt

log. r = 10,0000000
log. a = log. 198 = 2,2966652
compl.dec.log.b = c.d.l.155 = 7,8096683 – 10 (§. 249 Anm.)

mithin $\log.\text{tang. A} = \log.\frac{r \cdot a}{b} = 20,1063335 - 10$
$= 10,1063335$
$= \log.\text{tang. } 51^\circ\ 57'$.

3. Folglich iſt der Winkel A = 51° 57′ beynahe.

4. B = 90° – A = 38° 3′.

5. $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ (§. 97.), und

6. $a^2 = 39204$
$b^2 = 24025$

$a^2 + b^2 = h^2 = 63229$, folglich

7. $h = \sqrt{63229} = 251{,}45$ Schuhe.

8. Will man h trigonometriſch berechnen, ſo iſt

h : a

$h : a = r : \text{Sin. } A$ (§. 323. I.), also

$$h = \frac{r \cdot a}{\text{Sin. } A}.$$

9. Nun ist $\log. r = 10{,}0000000$

$\log. a = \log. 198 = 2{,}2966652$

$\text{compl. dec. log. Sin. } A = 0{,}1037642 - 10$

Folglich $\log. h = \log. \frac{r \cdot a}{\text{Sin. } A} = 12{,}4004294 - 10$

$= 2{,}4004294 = \log. 251{,}44$, folglich

10. wieder $h = 251{,}44$ Schuhe.

§. 327.

Lehrsatz;

Wenn im gleichschenklichten Dreyecke (Fig. 192.) B den Winkel an der Spitze, C einen Winkel an der Grundlinie, mithin b die Grundlinie, und c einen Schenkel bezeichnen, so ist

$$c : \tfrac{1}{2} b = r : \text{Sin. } \tfrac{1}{2} B.$$

Beweis;

1. Man ziehe von der Spitze auf die Grundlinie den Perpendikel BD, so ist

2. $\left.\begin{aligned} ABD &= \tfrac{1}{2} ABC = \tfrac{1}{2} B \\ AD &= \tfrac{1}{2} AC = \tfrac{1}{2} b \end{aligned}\right\}$ (§. 39. II. Aufs.),

ferner $AB = BC = c$; und $A = C$.

3. $AB : AD = r : \text{Sin. } ABD$ (§. 323.),

das ist: $c : \tfrac{1}{2} b = r : \text{Sin. } \tfrac{1}{2} B$.

§. 328.

Aufgabe:

Aus zwey Stücken eines gleichschenklichten Dreyeckes, worunter eine Seite ist, die übrigen durch die Rechnung zu finden.

Auflösung:

1. Wenn ein Winkel gegeben ist, so sind auch die beyden übrigen bekannt; denn ist B gegeben, so ist $2C = 180° - B$, und eben so ist aus C der Winkel $B = 180° - 2C$ bekannt.

2. Aus diesen Winkeln, und einer Seite läßt sich die andere Seite, und eben so aus der Grundlinie und einem Schenkel der Winkel B aus der Proportion §. 327. finden.

§. 329.

Beyspiele zur Uebung.

I. Beyspiel:

Aus $C = 46° 38'$ und $c = 124$ Schuhe den Winkel an der Spitze B, und die Grundlinie b suchen.

Auflösung:

1. $B = 180° - 2C = 86° 44'$; also $\frac{1}{2}B = 43° 22'$.

2. Ferner ist: $c : \frac{1}{2}b = r : \text{Sin.}\frac{1}{2}B$, also

$$\frac{1}{2}b = \frac{c.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}B}{r}, \text{ und } b = \frac{2c.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}B}{r}.$$

3. Nun ist $\log. 2c = \log. 248 = 2,3944517$
$\log. \text{Sin.} \frac{1}{2}B = \log. \text{Sin.} 43^\circ 22' = 9,8367447$

mithin $\log. b = \log. \frac{2c. \text{Sin.} \frac{1}{2}B}{r} = 2,2311964$.
$= \log. 170,29$, folglich

4. die Grundlinie $b = 179,28$ Schuhe.

II. Beyspiel:

Aus dem Schenkel $c = 1000$ Fuß, und der Grundlinie $b = 1336$ Schuhe, die bey dem Winkel B, C zu suchen.

1. $c : \frac{1}{2}b = r : \text{Sin.} \frac{1}{2}B$ (§. 327.),
mithin $\text{Sin.} \frac{1}{2}B = \frac{\frac{1}{2}br}{c}$.

2. Nun ist $\log. \frac{1}{2}b \log. 668 = 2,8247765$
$\log. r = 10,0000000$
compl.dec.log. $c = $ c.dec.log. $1000 = 7,0000000 - 10$

also $\log. \text{Sin.} \frac{1}{2}B = \log. \frac{\frac{1}{2}b.r}{c} = 19,8247765 - 10$
$= 9,8247765 = \log. \text{Sin.} 41^\circ 55'$;

3. Also ist $\frac{1}{2}B = 41^\circ 55'$, und $B = 83^\circ 50'$.

4. Endlich $2C = 180^\circ - B = 96^\circ 10'$, folglich $C = 48^\circ 5'$.

II. Abſchnitt.

Von Dreyecken überhaupt.

§. 330.

Lehrſatz:

In jedem Dreyecke ABC (Fig. 193.) verhalten ſich die Seiten, wie die Sinus ihrer entgegenſtehenden Winkel, das iſt: $a : b = Sin. A : Sin. B$.

Beweis:

1. Man beſchreibe um das Dreyeck einen Kreis (§. 116.), ſo iſt

2. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a = Sin. A \\ \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}b = Sin. B \end{array}\right\}$ (§. 292. VI. Zuſ.).

3. $Sin. A : Sin. B = Sin. A : Sin. B$ (§. 305. IV. Zuſ.), oder $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b = Sin. A : Sin. B$ (Nr. 2.), folglich

4. $a : b = Sin. A : Sin. B$ (§. 216. Arithm.).

§. 331.

Aufgabe:

Aus einer Seite a und zwey gegebenen Winkeln A, B den dritten Winkel C, und die übrigen zwey Seiten des Dreyeckes b, c ſuchen.

Auflöſung:

1. Aus den beyden Winkeln A, B iſt allemal der dritte $C = 180° - (A + B)$ (§. 47. I. Zuſ.) gegeben.

2. Aus a, A, B läßt sich nun b berechnen. Denn Sin. A : Sin. B = a : b (§. 330.), mithin

$$b = \frac{a.\,Sin.\,B}{Sin.\,A}.$$

3. Eben so wird endlich die Seite c aus a, A, C bestimmt; denn Sin. A : Sin. C = a : c; also

$$c = \frac{a.\,Sin.\,C}{Sin.\,A}.$$

§ 332.

Beyspiel zur Uebung:

Im Dreyecke ABC aus der Seite a = 3700 Fuß, und den Winkeln A = 65° 16′, B = 54° 12′ den dritten Winkel C, und die beyden Seiten b, c suchen.

Auflösung:

1. C = 180° − (A + B) = 180° − 119° 28′ = 60° 32′.

2. a : b = Sin. A : Sin. B, also

$$b = \frac{a.\,Sin.\,B}{Sin.\,A}.$$

3. Nun ist log. a = log. 3700 = 3,5682017
log. Sin. B = log. Sin. 54° 12′ = 9,9090550
comp. de. log. Sin. A = c. d. l. Sin. 65° 16′ = 0,0417875 − 10
log. b = 13,5190442 − 10

4. Mithin die Seite b = 3304,03 Fuß.

5. Ferner a : c = Sin. A : Sin. C; also $c = \frac{a.\,Sin.\,C}{Sin.\,A}$

6.

6. Es ist aber log. a = 3,5682017
log. Sin. C = 9,9398396
compl. dec. log. Sin. A = 0,0417875—10

Folglich log. c = 13,5498288—10.

7. Also die andere gesuchte Seite c = 3546,73 Schuhe.

§. 333.

Aufgabe:

Aus zwey Seiten a, b und einem gegenüberstehenden Winkel A, die übrigen zwey Winkel B, C, und die dritte Seite c suchen.

Auflösung:

1. Man bestimme erst den Winkel B, welcher der gegebenen Seite b entgegen steht aus §. 330, das ist:

$a : b = \text{Sin. } A : \text{Sin. } B$, mithin $\text{Sin. } B = \frac{b \cdot \text{Sin. } A}{a}$.

2. Da nun ein spitziger, und sein stumpfer Nebenwinkel den nemlichen Sinus haben (§. 291.), so müssen entweder die gegebenen Stücke, oder andere Umstände entscheiden, welcher von diesen beyden Winkeln der gesuchte sey.

3. Im Falle $a > b$, also $B < A$ (§. 334.) ist, so ist B allemal spitzig (§. 32. III. Zus.).

4. Wenn aber $a < b$, also $A > B$, so kann B spitzig oder stumpf seyn (§. 38. VI. Zus.), mithin läßt sich aus den gegebenen Stücken allein die

Um-

Unentschiedenheit nicht heben, es muß also schon vorher bekannt seyn, ob B spitzig oder stumpf ist.

4. Aus A, B ist nun auch $C = 180° - (A+B)$ gefunden.

5. Endlich läßt sich die dritte Seite c sowohl aus A, C, a, als aus B, C, b nach §. 330. berechnen; denn Sin. A : Sin. C = a : c; und eben so Sin. B : Sin. C = b : c, mithin

$$c = \frac{a.\,\text{Sin. C}}{\text{Sin. A}} = \frac{b.\,\text{Sin. C}}{\text{Sin. B}}.$$

§. 334.

Beyspiel zur Uebung:

Im Dreyecke ABC aus den Seiten a = 874 Schuhe b = 632 Schuhe und dem Winkel A = 57° 26′ die dritte Seite c, und die übrigen zwey Winkel B, C berechnen.

Auflösung:

1. $a : b = \text{Sin. A} : \text{Sin. B}$, also $\text{Sin. B} = \frac{b.\,\text{Sin. A}}{a}$.

2. Nun ist log. b = 2,8007171
   log. Sin. A = 9,9257069
   compl. dec. log. a = 7,0584886—10
   also log. Sin. B = 19,7849126—10.

3. Diesem Sinus entspricht sowohl der spitzige Winkel 37° 33′, als sein stumpfer Nebenwinkel 142° 27′, weil aber a > b; so ist auch A > B, mithin B = 37° 33′ oder spitzig.

4. Ferner ist der dritte Winkel $C = 180° - (A+B) = 85° 1'$.

5. Endlich $\text{Sin. } A : \text{Sin. } C = a : c$; also $c = \frac{a \cdot \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A}$.

6.
$$\begin{aligned} \log. a &= 2{,}9415114 \\ \log. \text{Sin. } C &= 9{,}9983553 \\ \text{compl. dec. log. Sin. } A &= 0{,}0742931 - 10 \\ \text{also } \log. c &= 13{,}0141598 - 10. \end{aligned}$$

7. Folglich die dritte Seite $c = 1033{,}14$ Schuhe.

§. 335.

Lehrsatz:

In jedem Dreyecke ABC (Fig. 194.) verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangens der halben Summe ihrer oppositen Winkel zur Tangens der halben Differenz eben dieser Winkel, das ist:

$$c + b : c - b = \text{tang. } \frac{C+B}{2} : \text{tang. } \frac{C-B}{2}.$$

Beweis:

1. Man ziehe aus A mit der kleinern Seite b oder AC einen Kreis, so wird solcher die grössere Seite c oder AB in E schneiden (Fig. 195.).

2. Man verlängere BA bis D, ziehe die Sehne CE, und mit ihr durch B eine Parallele (§. 43.), welche mit der verlängerten Sehne DC in F zusammenstoßt (§. 45. II. Zus.).

3. $DCE = 90°$ (§. 72. III. Zus.) $= DFB$ (§. 45. II.).

4.

4. DB : EB = DF : CF (§. 82. II).

5. Nun ist DB = DA + AB = AB + AC = c + b.

6. Ferner EB = AB − AE = AB − AC = c − b.

7. n = (o + r) + s = 2 n (§. 47. VII. u. VIII. Zus.), also $n = \frac{(o+r)+s}{2}$; ferner n = s + p (§. 45. II.), folglich

8. $s + p = \frac{(o+r)+s}{2} = \frac{C+B}{2}$.

9. $p = \frac{(o+r)+s}{2} - s = \frac{(o+r)+s-2s}{2}$

$= \frac{(o+r)-s}{2} = \frac{C-B}{2}$.

10. Nun beschreibe man aus B mit BF einen Kreis (Fig. 196.), so ist

11. BF = R; ferner aus Nr. 3. DF = *Tang.* (s + p), und CF = *Tang.* p (§. 285.), folglich

12. *Tang.* (s + p) : *Tang.* p = tang. (s + p) : tang. p (§. 305. IV. Zus.), das ist:

DF : CF = tang. $\frac{C+B}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$

(Nr. 8—11.).

13. Substituirt man nun in der Proportion (Nr. 4.) statt dem ersten und zweyten Gliede deren Werthe aus Nr. 5, und aus Nr. 6; und nimmt an die Stelle des zweyten Verhältnisses sein Gleiches aus Nr. 12, so wird

14. c + b : c − b = tang. $\frac{C+B}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$.

§. 336.

Aufgabe:

In einem Dreyecke ABC (Fig. 194.) aus zwey Seiten b, c, und dem eingeschlossenen Winkel A, die beyden übrigen Winkel B, C und die dritte Seite a suchen.

Auflösung:

1. Man ziehe den gegebenen Winkel A von 180° ab, so ist $180° - A = C + B$; mithin auch $\frac{C+B}{2}$ bekannt.

2. Man bestimme nun aus §. 335. die halbe Differenz eben dieser Winkel, oder $\frac{C-B}{2}$, nur muß man immer die größere von den gegebenen Seiten mit c, und die kleinere mit b bezeichnen, so ist auch $C > B$ (§. 34.).

3. Aus der halben Summe, und halben Differenz der beyden Winkel C, B sind sie selbst gegeben, (§. 86. Arithm.).

4. Die dritte Seite a läßt sich endlich sowohl aus b, B, A, als aus c, C, A nach §. 330. finden.

§. 337.

Beyspiel:

Aus dem Winkel $A = 136°$, und den beyden einschließenden Seiten $c = 336$ Sch. und $b = 224$ Sch. die dritte Seite a, und die beyden übrigen Winkel B, C des Dreyeckes finden.

Auflö-

Auflösung:

1. $C+B = 180° - 136° = 44°$, mithin $\frac{C+B}{2} = 22°$.

2. $c+b : c-b = \text{tang.} \frac{B+C}{2} : \text{tang.} \frac{C-B}{2}$, das ist: $560 : 112 = \text{tang. } 22° : \text{tang.} \frac{C-B}{2}$, also $\text{tang.} \frac{C-B}{2} = \frac{112 . \text{tang. } 22°}{560}$.

3. Nun ist $\log. 112 = 2{,}0492180$
$\log. \text{tang. } 22° = 9{,}6064096$
$\text{compl. dec. log. } 560 = 7{,}2518120-10$
also $\log. \text{tang.} \frac{C-B}{2} = 8{,}9074396$

4. mithin $\frac{C-B}{2} = 4° 37'$, folglich

5. $C = 26° 37'$, und $B\ 17° 23'$ (§. 86. Arithm.).

6. $\text{Sin. } C : \text{Sin. } A = c : a$, mithin
$a = \frac{c . \text{Sin. } A}{\text{Sin. } C}$.

7. Da nun $A = 136°$, also stumpf ist, so muß man dafür seinen Nebenwinkel 44° nehmen.

8. Nun ist $\log. 336 = 2{,}5263393$
$\log. \text{Sin. } 44° = 9{,}8417713$
$\text{compl. dec. log. Sin. } 26° 37' = 0{,}3487034-10$
also $\log. a = 2{,}7168140$

9. Folglich ist die dritte Seite $a = 520{,}98$ Sch. $= 521$ Schuhe.

§. 338.

Lehrsätze:

In jedem schiefwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 197.) ist:

I. $\text{tang. } C = \frac{c \cdot \text{Sin. } A}{b\,r - c \cdot \text{Cos. } A}\, r$

II. $a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2bc \cdot \text{Cos. } A}{r}$.

Beweis:

1. Man fälle sowohl im spitz- als im stumpfwinklichten Dreyecke aus B auf AC einen Perpendikel BD, so ist in den rechtwinklichten Dreyecken ABD.

2. $r : \text{Sin. } A = c : BD$, mithin $BD = \frac{c \cdot \text{Sin. } A}{r}$.

3. $r : \text{Cos. } A = c : AD$, also $AD = \frac{c \cdot \text{Cos. } A}{r}$.

4. Im spitzwinklichten Dreyecke ABC ist ferner
$CD = AC - AD = b - \frac{c \cdot \text{Cos. } A}{r}$.

5. Im stumpfwinklichten Dreyecke ABC hingegen
$CD = AC + AD = b + \frac{c \cdot \text{Cos. } A}{r}$. Diesen Ausdruck erhält man aber

6. aus Nr. 4, wenn man den Cosinus des stumpfen Winkels A negativ setzet (§. 296. IV. Zus.), denn
$b - \frac{c(-\text{Cos. } A)}{r} = b - \frac{-c \text{ Cos. } A}{r} = b + \frac{c \cdot \text{Cos. } A}{r}$
(§. 35.

(§. 35. V. Zuſ. Arithm.), folglich iſt in beyden Dreyecken

7. $CD = b - \frac{c.\,Cos.\,A}{r} = \frac{b\,r - c.\,Cos.\,A}{r}$, nur muß Cos. A poſitiv oder negativ genommen werden, je nachdem A ſpitzig, oder ſtumpf iſt.

8. In den rechtwinklichten Dreyecken CBD iſt $CD : BD = r : tang.\,C$ (§. 324.), oder $\frac{b\,r - c.\,Cos.\,A}{r} : \frac{c.\,Sin.\,A}{r} = r : tang.\,C$ (Nr. 2. u. 7.), alſo

9. $b\,r - c.\,Cos.\,A : c\,Sin.\,A = r : tang.\,C$, folglich

10. Nr. I. $tang.\,C = \frac{c.\,Sin.\,A}{b\,r - c.\,Cos.\,A}\,r.$

11. Endlich iſt $BC^2 = BD^2 + CD^2$ (§. 96. II. Zuſ.), das iſt:

$$a^2 = \frac{c^2.Sin.A^2}{r^2} + \frac{b^2r^2 - 2bcrCos.A + c^2.Cos.A^2}{r^2}$$

(Nr. 2. u. 7.)

$$= \frac{c^2(Sin.A^2 + Cos.A^2) + b^2r^2 - 2\,b\,c\,r\,Cos.A}{r^2}$$

$$= \frac{c^2r^2 + b^2r^2 - 2\,b\,c\,r\,Cos.A}{r^2}$$ (§. 296.), folglich

12. II. $a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2\,b\,c.\,Cos.\,A}{r}$.

I. Zuſatz: $tang.\,B = \frac{b.\,Sin.\,A}{c\,r - b.\,Cos.\,A}\,r$, $tang.\,A = \frac{a.\,Sin.\,B}{c\,r - a\,Cos.\,B}\,r.$

II. Zu-

II. Zusatz: Beyde Formeln des Lehrsatzes dienen ebenfalls aus den beyden Seiten b, c nebst dem eingeschlossenen Winkel A, die dritte Seite a, und die beyden übrigen Winkel B, C zu finden, doch ist die wirkliche Rechnung beschwerlich, weil sich die Logarithmen nicht anwenden lassen.

III. Zusatz: $\text{Cos. A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\,r$; $\text{Cos. B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\,r$; $\text{Cos. C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,r$.

§. 339.

Lehrsatz:

In jedem Dreyecke ABC ist:

$$\text{Sin. A} = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}}{2bc}\,r.$$

Beweis:

1. $\text{Sin. A}^2 = r^2 - \text{Cos. A}^2$ (§. 296.) $= (r+\text{Cos. A})(r-\text{Cos. A})$ (§. 103. Zus. Arithm.).

2. $r+\text{Cos. A} = r+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\,r$ (§. 338. III. Zus.)

$= \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}\,r = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\,r$

(§. 120. Arithm.)

$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}\,r$ (§. 103. Zus. Arithm.).

3.

3. $r - \text{Cos.}A = r - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}r = \frac{-b^2+2bc-c^2+a^2}{2bc}r$

$= \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}r = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}r$

$= \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}r$, folglich

4. $\text{Sin.}A^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}r^2$

5. $\text{Sin.}A = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}}{2bc}r.$

I. Zusatz: Setzet man der Kürze wegen den Zähler $\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]} = u$, so wird $\text{Sin.}A = \frac{ur}{2bc}$.

II. Zusatz: Aus den nemlichen Gründen wie im Lehrsatze ist

$\text{Sin.}B = \frac{ur}{2ac}$; $\text{Sin.}C = \frac{ur}{2ab}$.

§. 340.

Lehrsatz:

In jedem Dreyecke ABC (Fig. 198.) verhält sich die größte Seite c zur Summe der beyden andern b+a, wie die Differenz eben derselben b−a zum Segmente AD oder x der größten Seite außerhalb der Peripherie, welches ein mit der kleinsten Seite a, aus dem größten Winkel C, gezogener Kreis bestimmt, das ist; $c : b+a = b-a : AD$.

Be-

Beweis:

1. Man verlängere AC bis F, so ist

2. $AB : AF = AE : AD$ (§. 106.).

3. Nun ist $AB = c$, $AF = AC + CF = AC + CB = b + a$, und $AE = AC - CE = AC - CB = b - a$, $AD = x$, folglich

4. $c : b + a = b - a : x$.

I. Zusatz: Wenn man aus dem Winkel C, welcher der größten Seite c gegenüber steht, auf sie einen Perpendikel zieht, so theilet solcher die Seite c in zwey Theile, von welchen der an der größern Seite b anliegende $AG = \frac{1}{2}(c + x)$, und der an der kleinern Seite a anliegende $BG = \frac{1}{2}(c - x)$ ist. Denn $BD = c - x$, und $BG = DG = \frac{1}{2}BD$ (§. 60. I. Zus.) $= \frac{1}{2}(c - x)$, also auch $AG = AD + DG = x + \frac{1}{2}(c - x) = x + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(c + x)$.

II. Zusatz: $\text{Cos. } B = \frac{\frac{1}{2}(c-x)r}{a}$, denn

$BC : BG = r : \text{Cos. } B$ (§. 323. II.), das ist:

$a : \frac{1}{2}(c-x) = r : \text{Cos. } B$, also $\text{Cos. } B = \frac{\frac{1}{2}(c-x)r}{a}$

III. Zusatz: $\text{Cos. } A = \frac{\frac{1}{2}(c+x)r}{b}$. Denn

$AC : AG = r : \text{Cos. } A$, das ist:

$b : \frac{1}{2}(c+x) = r : \text{Cos. } A$, folglich $\text{Cos. } A = \frac{\frac{1}{2}(c+x)r}{b}$.

§. 341.

Aufgabe:

Aus den drey Seiten eines Dreyeckes die Winkel deſſelben zu berechnen.

I. Auflöſung:

1. Man bezeichne die gröſste Seite mit c, und die kleinſte mit a, und beſtimme nach dem Lehrſatze §. 340. das Stück x.

2. Man berechne man aus dem erſten Zuſatze eben dieſes §es die beyden Segmente, und

3. nach dem II. u. III. Zuſatze die Winkel A, B, ſo iſt

4. der dritte Winkel $C = 180^\circ - (A+B)$.

II. Auflöſung:

Man berechne die drey Winkel nach dem IIIten Zuſatze des 338ſten §.

III. Auflöſung:

Man beſtimme die drey Winkel aus §. 339.

§. 342.

Beyſpiel:

Aus $a = 48'$, $b = 50'$ und $c = 60'$ die drey Winkel zu ſuchen.

Auflöſung nach Nr. 1. §. 341.

1. $60 : 98 = 2 : x$, mithin $x = 3{,}267$ (§. 340.).

2. $\frac{1}{2}(c-x) = 28{,}366$; $\frac{1}{2}(c+x) = 31{,}633$, alſo

3. $\text{Cos. B} = \frac{\frac{1}{2}(c-x)\,r}{a}$ (§. 340. II. Zuſ.) $= \frac{28{,}366}{48}\,r.$

4. Nun iſt $\log. 28{,}366 \times r = 11{,}4527981$
compl. dec. log. $48 = 8{,}3187588-10$
$\log. \text{Cos. B} = 9{,}7715569$, alſo

5. Der Winkel $B = 53^\circ\,46'\,30''$.

6. $\text{Cos. A} = \frac{\frac{1}{2}(c+x)\,r}{b} = \frac{31{,}633}{50}\,r.$

7. Es iſt aber $\log. 31{,}633 \times r = 11{,}5001404$
compl. dec. log. $50 = 8{,}3010300-10$
$\log. \text{Cos. A} = 9{,}8011704$, alſo

8. der Winkel $A = 50^\circ\,45'\,11''$, folglich

9. der dritte Winkel $C = 180-(A+B) = 75^\circ\,28'\,19''$.

Auflöſung nach Nr. II. §. 341, das iſt nach §. 338. III. Zuſ.

10. $\text{Cos. A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}\,r = \frac{2500+3600-2304}{2.\,50.\,60}\,r$
$= \frac{3796}{6000}\,r.$

11. Ferner $\log. 3796.r = 13{,}5793262$
compl. dec. log. $6000 = 6{,}2218487-10$
$\log. \text{Cos. A} = 9{,}8011749$, alſo

12. Der Winkel $A = 50^\circ\,45'\,10''$ (Nr. 8.).

13. $\text{Cos. B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} r = \frac{2304+3600-2500}{2.48.60} r$

$= \frac{3404}{5760} r.$

Nun ist log. 3404.r = 13,5319896
compl. dec. log. 5760 = 6,2395775—10

log. Cos. B = 9,7715671, mithin

14. Der Winkel B = 53° 46′ 26″ (Nr. 5.).

15. $\text{Cos. C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} r = \frac{1204}{4800} r.$

16. log. 1204.r = 13,0806265
compl. dec. log. 4800 = 6,3187588—10

log. Cos. C = 9,3993853.

17. Folglich ist C = 75° 28′ 24″ (Nr. 9.).

Auflösung aus §. 341. Nr. III. oder aus §. 339.

18. Es ist l (a+b+c) = log. 158 = 2,1986571
l (b+c—a) = log. 62 = 1,7923917
log. (a+c—b) = log. 58 = 1,7634280
log. (a+b—c) = log. 38 = 1,5797836

log. (a+b+c)(b+c—a)(a+c—b)(a+b—c)
= 7,3342604
: 2

$\log. \sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}$
= 3,6671302

19. Nennet man der Kürze wegen, diesen ganzen Ausdruck = u (§. 339. I. Zus.).

20.

20. $\text{Sin. } A = \frac{u.r}{2bc}$, mithin

$$\log. u.r = 13{,}6671302$$
$$\text{compl. dec. log. } 2bc = 6{,}2218487-10$$
$$\log. \text{Sin. } A = 9{,}8889789, \text{ also}$$

21. Der Winkel $A = 50° 45' 10''$ (Nr. 8. u. 12.).

22. $\text{Sin. } B = \frac{u.r}{2ac}$ (§. 339. II. Zuſ.)

$$\log. u.r = 13{,}6671302$$
$$\text{compl. dec. log. } 2ac = 6{,}2395775-10$$
$$\log. \text{Sin. } B = 9{,}9067077, \text{ folglich}$$

23. Der Winkel $B = 53° 46' 26''$ (Nr. 5. u. 14.).

24. $\text{Sin. } C = \frac{u.r}{2ab}$ (§. 339. II. Zuſ.), alſo

$$\log. u.r = 13{,}6671302$$
$$\text{compl. dec. log. } 2ab = 6{,}3187588-10$$
$$\log. \text{Sin. } C = 9{,}9858890, \text{ folglich}$$

25. Der Winkel $C = 75° 28' 24''$ (Nr. 9. u. 17.)

§. 343.

Lehrſatz:

Wenn T den Flächeninhalt vom Dreyecke ABC (Fig. 197.) bezeichnet, und u wieder die Bedeutung vom 339ſten §. I. Zuſ. hat, ſo iſt

$$T = \frac{u}{4}.$$

Beweis:

Beweis:

$$T = AC.\tfrac{1}{2}BD \text{ (§. 151.)}$$
$$= b.\tfrac{1}{2}\frac{c.\sin A}{r} \text{ (§. 338. Nr. 2.)}$$
$$= \frac{bc}{2r}.\sin A = \frac{bc}{2r}.\frac{u.r}{2bc} \text{ (§. 339. I. Zuf.)}$$
$$= \frac{u}{4}.$$

§. 344.

Aufgabe:

Aus den drey Seiten $a = 48'$, $b = 50'$, $c = 60'$, den Flächeninhalt T vom Dreyecke ABC zu finden.

Auflösung:

Es ist wieder log. u. = 3,6671302 (§. 342. Nr. 18. u. 19.) log. 4 = 0,6020600, mithin

log. T = 3,0650702 (§. 343.)

folglich T = 1161,64 □ Fuß.

III. Abschnitt.

Von geradlinigten Figuren überhaupt.

§. 345.

Erklärung:

Für einen hohlen Winkel α heißt seine Ergänzung zu zwey rechten Winkeln der äußere, oder Nebenwinkel,

winkel, das ist, für $\alpha + A = 2R$, also $A = 2R - \alpha$, ist A der äußere oder Nebenwinkel von α.

§. 346.

Erklärungen:

Für einen erhabenen Winkel α heißt

a. der hohle Winkel, welcher mit ihm vier rechte giebt, der entsprechende hohle Winkel, das ist, für $\alpha + a = 4R$, ist a der entsprechende hohle Winkel vom erhabenen α.

b. Der hohle Winkel, welcher vom erhabenen abgezogen zwey rechte zum Reste giebt, heißt der Nebenwinkel, oder für $\alpha - a = 2R$, ist der hohle Winkel a der Nebenwinkel des erhabenen α.

c. Die Ergänzung des Nebenwinkels zu vier rechten Winkeln heißt der äußere Winkel, oder für den erhabenen Winkel α, dessen Nebenwinkel a, wenn $a + A = 4R$, also $A = 4R - a$ ist, so heißt der erhabene Winkel A der äußere Winkel des erhabenen α.

I. Zusatz: Für $\alpha = 238°$ ist der entsprechende hohle Winkel $a = 122°$, der Nebenwinkel $a = 58°$, der äußere Winkel $A = 302°$.

II. Zusatz: Für einen erhabenen Winkel α ist sein äußerer der Summe zweyer rechten und dem innern entsprechenden hohlen Winkel gleich. Denn $A = 4R - a = \alpha + a - a = 2R + a$.

III.

III. Zusatz: Ein erhabener Winkel α hält mit seinem äußern Winkel A zusammen 6 rechte. Denn

$$\alpha - 2 = 2R$$
$$A = 4R - 2, \text{ also}$$

$$\alpha + A = 6R; \text{ folglich auch } \alpha = 6R - A,$$

und $A = 6R - \alpha$.

IV. Zusatz: Wenn in einer Figur z. B. (Fig. 200.) eine oder mehrere Seiten einander schneiden, so sind, wenn man die Seiten der Ordnung der Buchstaben nach verfolgt, die Winkel A, B, D hohle, hingegen C, E, F erhabene Winkel.

§. 347.

Lehrsatz:

Durch die Lage aller Ecke (Fig. 199. u. 200.) ist eine geradlinigte Figur vollkommen bestimmt.

Beweis:

Denn dadurch ist die Anzahl der Seiten (§. 15. II. Zus.) ihre Lage und Größe (§. 6.), mithin sind alle Seiten und Winkel, also die ganze Figur vollkommen bestimmt (§. 57.).

Zusatz: Wenn man eine Seite, die man beliebig verlängert, zur Abscissenlinie annimmt (§. 205.), so ist durch alle Abscissen und Ordinaten die Figur vollkommen bestimmt.

§. 348.

Lehrsatz:

Wenn in einer geradlinigten Figur von lauter hohlen Winkeln (Fig. 199.) A, B, C, D, E, F die äußern Winkel, und a, b, c, d, e, f die Seiten AB, BC u. s. w. der Ordnung nach bezeichnen, so ist für die Seite AF = f als Abscissenlinie, und dem Radius = 1.

I. a Sin. A + b Sin. (A + B) + c. Sin. (A + B + C) + d Sin. (A + B + C + D) + e. Sin. (A + B + C + D + E) = 0.

II. a. Cos. A. + b. Cos. (A + B) + c. Cos. (A + B + C) + d. Cos. (A + B + C + D) + e. Cos. (A + B + C + D + E) = − f.

Beweis:

1. Man ziehe durch B, C, D, E auf die verlängerte Seite, oder Abscissenlinie AF die Perpendikel, oder Ordinaten Bm, Ct, Ds, Er.

2. Durch C, E ziehe man zu AF die Parallelen np, qE, so ist,

3. wenn A als der Anfangspunct der Abscissen genommen wird, die Abscisse von B = − Am, weil Am kein Theil der Seite AF, sondern ihrer Verlängerung nach entgegengesetzter Richtung ist.

Die Abscisse von C = At = − Am + nC

. . . . von D = As = − Am + nC + Cp

. . . . von E = Ar = − Am + nC + Cp + qE,

endlich

4.

4. die Abſciſſe von $F = AF = f = -Am + nC + Cp + qE + rF$.

5. Die Ordinate für $B = Bm$
$\ldots\ldots\ldots C = Ct = Bm + Bn$
$\ldots\ldots\ldots D = Ds = Bm + Bn + Dp$
$\ldots\ldots\ldots E = Er = Bm + Bn + Dp - Dq$, endlich

6. für $F = o$ (§. 205. II. Zuſ.) $= Bm + Bn + Dp - Dq - Er$.

7. Nun ſetze man den Winkel $BAm = \alpha$, $BCn = \beta$, $DCp = \gamma$, $DEq = \delta$, $EFr = \varepsilon$, ſo iſt

8. $\alpha = A$

9. $\beta = R - nBC$; ferner
$nBC + mBA = B$ (§. 345.), das iſt:
$nBC + R - \alpha = B$, mithin
$nBC = \alpha + B - R = A + B - R$, folglich
$\beta = R - (A + B - R) = 2R - (A + B)$.

10. $\gamma = BCD - R - BCt = BCD - R - nBC$
$= 2R - C - R - (A + B - R)$
$= 2R - (A + B + C)$.

11. $\delta = R - EDq = R - CDE + CDp$
$= R - (2R - D) + R - \gamma = D - \gamma$
$= D - 2R + (A + B + C) = A + B + C + D - 2R$

12. $\varepsilon = R - rEF = R - DEF + R + \delta = 2R + \delta - (2R - E) = \delta + E = A + B + C + D + E - 2R$;
folglich iſt

13. $\text{Sin.}\alpha = +\text{Sin.A}$, und $\text{Cos.}\alpha = +\text{Cos.A}$ (§. 292. IX. Zuſ. u. §. 296. IV. Zuſ.).

14. $\text{Sin.}\beta = +\text{Sin.}(A+B)$; $\text{Cos.}\beta = -\text{Cos.}(A+B)$.

15. $\text{Sin.}\gamma = +\text{Sin.}(A+B+C)$; $\text{Cos.}\gamma = -(A+B+C)$.

16. $\text{Sin.}\delta = -\text{Sin.}(A+B+C+D)$,
$\text{Cos.}\delta = -\text{Cos.}(A+B+C+D)$.

17. $\text{Sin.}\varepsilon = -\text{Sin.}(A+B+C+D+E)$,
$\text{Cos.}\varepsilon = -\text{Cos.}(A+B+C+D+E)$.

18. Nun iſt $AB : Bm = 1 : \text{Sin.}\alpha$ (§. 323.) $= 1 : \text{Sin.A}$, alſo
$Bm = AB.\text{Sin.A} = a\,\text{Sin.A}$, eben ſo
$Bn = b.\text{Sin.}(A+B)$
$Dp = c.\text{Sin.}(A+B+C)$
$Dq = -d.\text{Sin.}(A+B+C+D)$
$Er = -e.\text{Sin.}(A+B+C+D+E)$; folglich

I. $Bm+Bn+Dp-Dq-Er = a\text{Sin.A}+b.\text{Sin}(A+B)+c.\text{Sin.}(A+B+C)+d.\text{Sin.}(A+B+C+D)+e.\text{Sin.}(A+B+C+D+E) = 0$ (Nr. 6.)

19. Eben ſo iſt $AB : Am = 1 : \text{Cos.}\alpha$ (§. 323. II.) $= 1 : \text{Cos.A}$, mithin
$Am = AB.\text{Cos.A} = a.\text{Cos.A}$, ferner
$Cn = b.\text{Cos.}\beta = -b.\text{Cos.}(A+B)$
$Cp = -c.\text{Cos.}(A+B+C)$
$qE = -d.\text{Cos.}(A+B+C+D)$
$rF = -e.\text{Cos.}(A+B+C+D+E)$, alſo

$-Am+Cn+Cp+qE+rF = -a.Cos.A-b.Cos.(A+B)$
$-c.Cos.(A+B+C)-d.Cos.(A+B+C+D)-e.Cos.$
$(A+B+C+D+E) = f$ (Nr. 4.), folglich

II. $a.Cos.A+b.Cos.(A+B)+c.Cos.(A+B+C)$
$+d.Cos.(A+B+C+D)+e.Cos(A+B+C+D+E)$
$= -f.$

§. 349.

Lehrsatz:

Beyde Formeln vom vorhergehenden Lehrsatze gelten auch für Figuren, wo mehrere Winkel erhaben sind, und selbst einige Seiten einander schneiden (Fig. 200.).

Beweis:

1. Man ziehe die Ordinaten Bm, Ct, Ds, rE, so haben Ct, rE eine der ersten Ordinate Bm entgegengesetzte Lage, und sind also negativ.

2. Zieht man ferner zu AF durch C, E die Parallelen np, Eq, so ist

3. die Abscisse für den Punct B = Am
. . . . . C = At = Am+nC
. . . . . D = As = Am+nC+Cp
. . . . . E = Ar = Am+nC+Cp+qE,
endlich

4. Für F = f = Am+nC+Cp+qE+rF.

5. Die Ordinate für B = Bm
. . . . . C = −Ct = Bm−Bn
. . . . . D = Ds = Bm−Bn+Dp
. . . . . E = −rE = Bm−Bn+Dp−Dq,
endlich

6.

6. für $F = o = Bm - Bn + Dp - Dq + rE$.

7. Nimmt man wieder $BAm = \alpha$; $BCn = u = \beta$; $DCp = x = \gamma$, $DEq = y = \delta$; $EFr = z = \varepsilon$, so ist

8. $\alpha = 2R - A$ (§. 345.).

9. $\beta = u = 2R - (\alpha + ABC)$ (§. 47. I. Zuf.)
$= 2R - (2R - A + 2R - B) = 2R - (4R - A - B)$
$= A + B - 2R$.

10. $\gamma = BCD - 2R - \beta$ (wenn BCD als erhabener Winkel genommen wird)
$= 6R - C - 2R - \beta$ (§. 346. III. Zuf.)
$= 4R - C - (A + B - 2R) = 6R - (A + B + C)$

11. $\delta = y = 2R - (CDE + x) = 2R - (2R + - D + \gamma)$
$= D - \gamma = A + B + C + D - 6R$.

12. $\varepsilon = Z = DEF - (2R + \delta) = 6R - E - 2R - \delta$
$= 4R - E - (A + B + C + D - 6R)$
$= 10R - (A + B + C + D + E)$, folglich ist

13. $\text{Sin.}\alpha = + \text{Sin. A}$; $\text{Cos.}\alpha = - \text{Cos. A}$.

14. $\text{Sin.}\beta = - \text{Sin.}(A + B)$; $\text{Cos.}\beta = - \text{Cos.}(A + B)$

15. $\text{Sin.}\gamma = + \text{Sin.}(A + B + C)$; $\text{Cos.}\gamma = - \text{Cos.}(A + B + C)$.

16. $\text{Sin.}\delta = - \text{Sin.}(A + B + C + D)$
$\text{Cos.}\delta = - \text{Cos.}(A + B + C + D)$

17. $\text{Sin.}\varepsilon = + \text{Sin.}(A + B + C + D + E)$
$\text{Cos.}\varepsilon = - \text{Cos.}(A + B + C + D + E)$.

18.

18. Nach §. 323. ist wieder:

$$Bm = +a.\,Sin.\,A$$
$$Bn = -b.\,Sin.\,(A+B)$$
$$Dp = +c.\,Sin.\,(A+B+C)$$
$$Dq = -d.\,Sin.\,(A+B+C+D)$$
$$Er = +e.\,Sin.\,(A+B+C+D+E),\ \text{folglich}$$

I. $Bm-Bn+Dp-Dq+Er = a.Sin.A+b.Sin.(A+B)+c.Sin.(A+B+C)+d.Sin.(A+B+C+D)+e.Sin.(A+B+C+D+E) = o$ (Nr. 6.).

19. Ferner ist

$$Am = -a.\,Cos.\,A$$
$$Cn = -b.\,Cos.\,(A+B)$$
$$Cp = -c.\,Cos.\,(A+B+C)$$
$$Eq = -d.\,Cos.\,(A+B+C+D)$$
$$rF = -e.\,Cos.\,(A+B+C+D+E),\ \text{also}$$

$Am+Cn+Cp+Eq+rF = -a.Cos.A-b.Cos.(A+B)-c.Cos.(A+B+C)-d.Cos.(A+B+C+D)-e.Cos.(A+B+C+D+E) = f$ (Nr.4.), folglich

II. $a.Cos.A+b.Cos.(A+B)+c.Cos.(A+B+C)+d.Cos.(A+B+C+D)+e.Cos.(A+B+C+D+E) = -f.$

I. Zusatz: Beyde Formeln lassen sich leicht auf eine größere Anzahl von Seiten, oder Ecken erweitern, und bey einer geringern Anzahl derselben abbrechen.

II. Zusatz: Für ein geradlinigtes Dreyeck ist

I. $a.Sin.A+b.Sin.(A+B) = o$; und

II. $a.Cos.A+b.Cos.(A+B) = -c.$

III. Zu-

III. Zusatz: Im geradlinigten Dreyecke ist

$$\text{tang. } A = \frac{-b.\text{Sin. } B}{a+b.\text{Cos. } B}.$$

Denn $a \text{ Sin. } A + b \text{ Sin. } (A+B) = 0 = a \text{ Sin. } A + b \text{ (Sin. A. Cos. B} + \text{Cos. A. Sin. B)}$ (§. 306.) $= \text{Sin. } A\,(a + b \text{ Cos. } B) + b \text{ Cos. A. Sin. B}$, also $\text{Sin. } A\,(a+b.\text{Cos. } B) = -b \text{ Cos. A. Sin. B}$; folglich

$$\frac{\text{Sin. } A}{\text{Cos. } A} = \text{tang. } A \text{ (§. 301.)} = \frac{-b.\text{ Sin. } B}{a+b.\text{Cos } B}.$$

IV. Zusatz: Im Dreyecke ist $c = \sqrt{(a^2+b^2+2ab.\text{Cos.B})}$

Denn $a \text{ Sin. } A + b \text{ Sin. } (A+B) = 0$

$a \text{ Cos } A + b \text{ Cos. } (A+B) = -c$

(II. Zus.); nun addire man ihre Quadrate, so ist $a^2\text{Sin. } A^2 + 2\,a\,b\text{Sin. A. Sin.}(A+B) + b^2\text{Sin.}(A+B)^2 + a^2 \text{ Cos. } A^2 + 2\,a\,b \text{ Cos. A. Cos. } (A+B) + b^2\text{Cos. } (A+B)^2 = c^2 = a^2\,(\text{Sin. } A^2 + \text{Cos. } A^2) + b^2\,[\text{Sin. } (A+B)^2 + \text{Cos. } (A+B)^2] + 2\,a\,b\,[\text{Sin. A Sin. } (A+B) + \text{Cos. A. Cos. } (A+B)] = a^2 + b^2 + 2\,a\,b \text{ Cos. B}$ (§. 296. u. §. 309. IV. Zus.); folglich

$$c = \sqrt{(a^2+b^2+2\,a\,b \text{ Cos. B})}.$$

V. Zusatz: Bezeichnet man wie §. 322. die drey innern hohlen Winkel eines Dreyeckes (Fig. 197.) durch A, B, C und ihre opponirte Seiten durch a, b, c, so verwandelt sich die II Gleichung vom II. Zus. in nachstehende:

$c.\text{Sin. } (2\,R - A) + a \text{ Sin. } (2\,R - A + 2\,R - B) = 0$

$= c.\text{Sin. } A + a \text{ Sin. } (4\,R - (A+B))$

$= c \text{ Sin. } A - a \text{ Sin. } (A+B) = c \text{ Sin. } A - a \text{ Sin. } C$

(§. 292.

(§. 292. I. Zuſ.), folglich c Sin. A = a Sin. C, und a : c = Sin. A : Sin. C (§. 330.).

VI. Zuſatz: Durch die nemliche Subſtitution wird im III. Zuſ. $\text{tang.}(2R-A) = \frac{-a\,\text{Sin.}(2R-B)}{c+a\,\text{Cos.}(2R-B)}$,

alſo $-\text{tang. A} = \frac{-a\,\text{Sin. B}}{c-a\,\text{Cos. B}}$; folglich

$\text{tang, A} = \frac{a\,\text{Sin. B}}{c-a\,\text{Cos. B}}$ (man vergleiche §. 338.).

VII. Zuſatz: Aus dem IV. Zuſ. bekömmt man endlich

$b = \sqrt{(c^2+a^2+2\,a\,c\,\text{Cos.}(2R-B)}$

$b = \sqrt{(a^2+c^2-2\,a\,c\cdot\text{Cos. B})}$ wie §. 338. II.

Anwendung. Dieſe im gegenwärtigen Abſchnitte angeführten Sätze enthalten die erſten Gründe einer ſogenannten Goniometrie, deren fernere Entwicklung und Anwendung auf die Berechnung und Theilung geradlinigter Figuren für gegenwärtiges Lehrbuch zu weitläufig iſt. Man ſehe Däzels Anfangsgründe der Goniometrie. München bey Lindauer 1800.

III. Hauptstück.

Trigonometrische Feldmeßkunst.

I. Abschnitt.

Von Ausmessung der Winkel.

§. 350.

Erklärungen:

Ein Werkzeug, wodurch die Größe eines Winkels auf dem Felde in Graden, Minuten u. s. w. bestimmt wird, heißt ein **Winkelmesser**, oder **Astrolab**, dessen wesentliche Theile sind:

a. Das **Stativ**, oder **Gestell**, welches dem Instrumente in einer jeden beliebigen Lage eine feste Stellung giebt.

b. Eine **Ebene**, auf welcher ein **ganzer Kreis**, oder ein **vierter**, oder auch **sechster Theil** eines Kreises mit einem in Grade, Minuten u. s. w. eingetheilten Rande verzeichnet ist, in beyden letzten Fällen heißt denn auch der Winkelmesser entweder ein **Quadrant**, oder **Sextant**.

c. Eine

c. Eine um den Mittelpunct des Kreises bewegliche Regel mit Dioptern, oder einem Tubus, welche zugleich in einer auf dem Kreise senkrechten Ebene auf und ab beweglich sind.

Anmerkung: Nähere Einsicht von einem Astrolab muß man sich durch eigene Beschreibungen und Betrachtung solcher Instrumente selbst erwerben.

§. 351.

Erklärung:

Da sich auf einem Maaßstabe außer Zollen und Linien nicht leicht kleinere Abtheilungen verzeichnen lassen, und eben so auf dem Rande des Astrolabes, dessen Radius nie wohl größer, als ein Fuß seyn kann, wenn anders das Instrument nicht zu groß, zu schwer, also auf dem Felde unbrauchbar seyn soll, nur ganze und halbe Grade aufgetragen sind, so bringt man im ersten Falle eine andere geradlinigte Scale, und im zweyten einen andern concentrischen eingetheilten Kreisbogen damit in Verbindung, um die Länge einer Linie oder die Größe eines Bogens in kleinern Abtheilungen zu bestimmen. Man nennt diese Vorrichtung bey geraden Linien sowohl, als bey Kreisbögen einen Nonius, oder Vernier, je nachdem man die Erfindung desselben dem Portugiesen Peter Nunnez, oder dem Deutschen Peter Vernier zueignet.

§. 352.

§. 352.

Aufgabe:

Einen Nonius zu verfertigen, wodurch man die Länge einer Linie auf einen in Zolle und Linien eingetheilten Maaßstabe bis auf einzelne Decimalen einer Linie bestimmen kann.

Auflösung:

1. Die Linie AB (Fig. 201.) sey in einzelne z. B. Pariser Duodecimalzolle und Linien getheilet, so daß A 1 = ed = dc = cb = ba = aC u. s. w. = 1 Linie, also A 11 = 11 Linien ist.
2. Man ziehe nun die gerade Linie MN = AC = A 11 = 11 Linien, und theile sie in 10 gleiche Theile.
3. Bey N setze man 0, so heißt die Linie No der Index;
4. ferner schreibe man von N gegen M zu, der Ordnung nach, an die Theilungsstriche die Zahlen 1, 2, 3 . . . . 10.
5. Diese eingetheilte Linie MN ist der verlangte Nonius.

Beweis:

6. $Na = \frac{1}{10} MN$ (Nr. 2.) $= \frac{1}{10} AC = \frac{11}{10}$ Linien; und Ca = 1 Lin. (Nr. 1.), also

7.

7. $N\alpha - Ca = \frac{11}{10}$ Lin. $- 1$ Lin. $= 0{,}1$ Lin.

$N\beta - Cb = 2N\alpha - 2Ca = 0{,}2$ Lin.

$N\gamma - Cc = 3N\alpha - 3Ca = 0{,}3$ Lin.

$N\delta - Cd = 4N\alpha - 4Ca = 0{,}4$ Lin.

$N\varepsilon - Ce = 5N\alpha - 5Ca = 0{,}5$ Lin. u. ſ. f.

8. Legt man M an A, und MN längſt AB, ſo ſtimmt der Index N o mit C 11 zuſammen (Nr. 2.), hingegen die Linie α 1 fällt mit a 10 in keine gerade Linie, ſie liegt um 0,1 Linie gegen MA zurück (Nr. 7.).

9. Eben ſo iſt β 2 von b 9 um 0,2; γ 3 von c 8 um 0,3; δ 4 von d 7 um 0,4, und ε 5 von e 6 um 0,5 Linien u. ſ. f. gegen MA zu entfernt.

10. Schiebet man alſo den Nonius gegen B zu vorwärts, bis α 1 mit a 10 in eine gerade Linie fällt, ſo hat ſich der Index N o von C 11 vorwärts um 0,1 Linie entfernt.

11. Schiebet man den Nonius noch mehr vorwärts, ſo entfernt ſich der Index von C 11

um 0,2, wenn β 2 und b 9
um 0,3, . . γ 3 und c 8
um 0,4, . . δ 4 und d 7
um 0,5, . . ε 5 und e 6 u. ſ. f.

zuſammentreffen.

12.

12. Will man also die Länge einer gegebenen Linie FG bis auf einzelne Decimalen einer Par. Linie bestimmen, so lege man F an A, und FG längst AB, so ist auf dem Maaßstabe gegenwärtig FG = 1 Zoll + 10 Lin.

13. Nun schiebe man den Vernier so weit vorwärts, bis der Index mit G zusammentrifft, oder NoG in einer geraden Linie liegen.

14. Jetzt bemerke man, welcher Theilungsstrich des Verniers mit einem des Maaßstabes zusammentrifft, so giebt die an dieser Linie gesetzte Zahl des Verniers die Menge der Decimalen, die man noch addiren muß (Nr. 11.); so ist in der Figur

15. FG = 1 Zoll + 10,5 Linien.

Zusatz: Allgemein, wenn auf einem Maaßstabe eine Länge, z. B. eines Fußes, in r Theile getheilet ist, so kann man einen Nonius verfertigen, der in Verbindung mit dem Maaßstabe n mal kleinere Theile angiebt, wenn man MN = n + 1 Theile des Maaßstabes nimmt, und in n Theile theilet, so daß nemlich $N\alpha = \frac{1}{n}$ MN ist.

§. 353.

Aufgabe:

Einen Nonius zu verfertigen, wo man auf einem in ganze und halbe Grade eingetheilten Rande eines

Astro-

Astrolabes einen Winkel bis auf einzelne Minuten bestimmen kann.

Auflösung:

1. Man beschreibe aus dem Mittelpuncte des Astrolabes einen mit dem eingetheilten Rande concentrischen Kreis.

2. Auf selben nehme man 15½ Grade, oder 31 halbe Gradabtheilungen, und theile diesen Bogen in 30 gleiche Theile.

3. Läßt sich nun dieser Bogen rings um den eingetheilten Rand so verschieben, daß er immer concentrisch bleibt, so ist er der verlangte Nonius.

Der Beweis sowohl, als der Gebrauch ist aus dem vorhergehenden §, vorzüglich, wenn man im Besitze eines solchen mit einem Vernier versehenen Astrolabes ist, für sich einleuchtend.

§. 354.

Aufgabe:

Einen Winkel ACB (Fig. 143.) mit dem Astrolab auf dem Felde zu messen.

Auflösung:

1. Man bringe das Astrolab bey C so an, daß dessen Mittelpunct c genau über C senkrecht ist.

2. Bewege die Diopterregel um den Mittelpunct, bis deren Kante auf dem Rande genau bey o anliegt,

liegt, und befestige dieselbe vermittels der dabey befindlichen Schraube.

3. Nun drehe man den ganzen eingetheilten Rand um seine Axe, bis die Diopter gegen den einen Object A zu gekehrt ist, also die Kante der Regel in der Richtung ca oder cD liegt.

4. In dieser Richtung bringe man die Scheibe in eine horizontale Lage, und befestige sie.

5. Nun löse man die Schraube an der Diopterregel (Nr. 2.), und drehe solche, während die Scheibe ihre horizontale Lage unverrückt beybehalten muß. bis sie nach dem andern Objecte B zugekehrt ist, mithin die Kante in die Lage cb oder cE kömmt.

6. Auf dem eingetheilten Rande der Scheibe wird nun die Kante der Regel mit Hilfe des Nonius die Größe des Winkels in Graden und Minuten angeben.

Der Beweis ist mit jenem §. 199. vollkommen einerley.

Zusatz: Liegt der Winkel ACB (Fig. 202.) in einer Verticalebene, so muß die Scheibe mit dem eingetheilten Rande in eben diese Ebene gebracht, und dann so gedreht werden, daß der Diameter, an dessen Anfangspunct o steht, eine horizontale Lage hat.

§. 355.

§ 355.

Aufgabe:

Einen auf dem Papiere verzeichneten Winkel zu messen.

I. Auflösung:

Man nehme auf dem verjüngten Maaßstabe mit dem Zirkel die Länge von 1000 Theilen, und beschreibe damit aus dem gegebenen Winkel A (Fig. 190) einen Kreis, so daß also AB = r = 1000 ist. Aus B fälle man auf den andern Schenkel einen Perpendikel BH, so ist solcher der Sinus von A (§. 284.); man messe also BH auf eben dem Maaßstabe, und suche in den Tabellen jenen Sinus auf, dessen erste drey Ziffer damit übereinstimmen, so ist dadurch die Größe von A bekannt. Oder weil AH der Cosinus ist (§. 296. I. Zus.), so messe man diese Linie, und suche sie unter den Cosinusen der Tabelle. Für BH = 545, oder AH = 838 wäre A = 33° 1′ oder 2′.

II. Auflösung:

Man nehme wieder mit dem Zirkel im verjüngten Maaße tausend Theile, und beschreibe aus dem gegebenen Winkel A (Fig. 191.) einen Kreis, so daß AH = r = 1000 auf dem verjüngten Maaßstabe hält. Nun errichte man durch H auf dem Schenkel AH einen Perpendikel HB, bis solcher mit dem andern Schenkel in B zusammenstoße, so ist BH die Tangens von A (§. 285.). Man messe also BH nach dem verjüngten Maaße, und schlage sie in den Ta-

hellen unter der Tangenten auf, so erhält man A. Z. B. Wenn BH = 713, so ist A = 35°, 30'.

III. Auflösung:

Man nehme ebenfalls mit dem Zirkel auf dem verjüngten Maaßstabe 1000 Theile, und beschreibe damit aus dem gegebenen Winkel B (Fig. 192.) einen Bogen, so daß also BA = BC = 1000 ist. Die Hälfte der Seite AC, oder die Linie AD ist der Sinus des halben gegebenen Winkels B (§. 284.); man messe also die Seite AC im verjüngten Maaße, schlage ihre Hälfte unter den Sinusen der Tafeln auf, so bekömmt man den halben Winkel B. Z. B. für AC = 1147, ist $\frac{1}{2}$AC = 573,5, also $\frac{1}{2}$B = 35°, mithin B = 70°.

I. Zusatz: Wenn man keine Tabellen bey Handen hat, in welchen die Sinus, Cosinus, Tangenten selbst, sondern nur ihre Logarithmen angegeben sind, so schlägt man die Logarithmen der gefundenen Zahlen auf, nur muß erst die Charakteristik nach §. 315. IV. u. V. Zus. bestimmt werden.

II. Zusatz: Da die Tangenten von Winkeln, die nahe bey 90° sind, sehr schnell wachsen, und sehr groß sind, so ist das Verfahren nach der II. Aufl. bey solchen Winkeln nicht anwendbar.

III. Zusatz: Bey stumpfen Winkeln ist es vortheilhafter nach der ersten und zweyten Auflösung ihre spitzigen Nebenwinkel zu bestimmen.

IV. Zu-

IV. Zusatz: Wenn man nach der dritten Auflösung für einen beliebigen Halbmesser, den man = 1000 setzet, die Chorden für alle Winkel auf einem Maaßstabe verzeichnet, so heißt solcher ein geradlinigter Transporteur.

§. 356.

Aufgabe:

An einen Punct einer gegebenen Linie einen in Graden und Minuten bestimmten Winkel zu verzeichnen, z. B. von 36°. 23'.

I. Auflösung:

Man nehme mit dem Zirkel auf dem verjüngten Maaßstabe 1000 Theile, und verzeichne damit aus dem gegebenen Puncte A (Fig. 190.) einen Kreis. Nun schlage man den Cosinus des gegebenen Winkels in den Tabellen auf, und trage solchen nach dem verjüngten Maaßstabe aus A auf der gegebenen Linie auf, man nehme nemlich AH = Cos. 36° 23' = 805. Ferner errichte man durch H auf AH einen Perpendikel, und gebe solchem die Länge vom Sinus des gegebenen Winkels, nemlich BH = Sin. 36° 23' = 593. Endlich ziehe man die gerade Linie AB, so ist BAH = 36° 23' (§. 355. I. Aufl.), also der verlangte Winkel.

II. Auflösung:

Man beschreibe aus A (Fig. 191.) mit dem Halbmesser AH = 1000 Theilen des verjüngten Maaßes einen

Kreis. Durch H errichte man auf AH einen Perpendikel, und trage auf solchen die Länge der Tangens vom gegebenen Winkel aus den Tabellen nach dem nemlichen Maaßstabe auf, man nehme nemlich HB = tang. 36° 23′ = 737; endlich ziehe man die gerade Linie AB, so ist BAH = 36° 23′ (§. 355. II. Aufl.), also der verlangte Winkel.

III. Auflösung:

Man beschreibe aus dem gegebenen Puncte B (Fig. 192.) mit dem Halbmesser BA = 1000 Theilen im verjüngten Maaße einen Kreis. Nun bestimme man aus den Tabellen den Sinus für den halben gegebenen Winkel, nehme das Dupplum dieses Sinus, und trage solches als Sehne AC aus A an den Kreis, nemlich Sin. 18° 11′ = 312 = ½ AC, also AC = 624. Endlich ziehe man die gerade Linie BC, so ist ABC = 36° 23′ §. 355. III. Aufl.), folglich der verlangte Winkel.

Anmerkung: Für gegenwärtigen §. gelten ebenfalls die Zusätze des vorhergehenden §.

II. Abschnitt.

Von trigonometrischen Vermessungen der Weiten, Höhen, und Flächen.

§. 357.

Aufgabe:

Die unzugängliche Weite AB (Fig. 144.) zu messen, wenn man vom Standorte C nach A und B kommen kann.

Auflösung:

1. Man messe die beyden Linien CA, CB (§. 188.),
2. und den Winkel ACB mit dem Astrolab (§. 354.).
3. Aus diesen beyden Seiten, und dem eingeschlossenen Winkel berechne man die dritte Seite AB (§. 336.).

§. 358.

Aufgabe:

Die unzugängliche Weite AB (Fig. 145.) finden, wenn man vom Standorte C nach B, nicht aber nach A kommen kann.

Auflösung:

1. Man messe die Seite CB, und
2. mit dem Astrolab die beyden Winkel C, B, und
3. berechne aus der Seite nebst den beyden anliegenden Winkeln die Seite AB (§. 331.).

§. 359.

§. 359.

Aufgabe:

Die unzugängliche Weite AB (Fig. 147.) finden, wenn man vom Standorte C nach keinen dieser Gegenstände kommen kann.

Auflösung:

1. Man nehme noch einen Standpunct D, mithin eine Standlinie CD an, und messe sie.
2. Bey C messe man mit dem Astrolab die Winkel ACB, ACD, mithin auch BCD, und
3. bey D die Winkel ADC, und ADB, also auch CDB.
4. Aus der Seite CD, den Winkeln ACD und ADC berechne man die Seite AD (§. 331.).
5. Eben so bestimme man aus CD und den Winkeln BCD, BDC die Seite BD.
6. Aus dem Winkel ADB, und den beyden Seiten AD, BD läßt sich die gesuchte Weite AB bestimmen. (§. 336.).
7. Zur Probe kann man auch aus ACD, ADC und CD (Nr. 4.) die Seite AC, und
8. aus CD, BCD, BDC (Nr. 5.) die Seite BC, und endlich
9. Aus AC, BC und dem Winkel ACB nach §. 336. die gesuchte Weite AB berechnen.

§. 360.

Aufgabe:

Die Höhe AB (Fig. 202.) zu finden, wenn man vom Standorte C die horizontale Linie CA messen kann.

Auflösung:

1. Man messe die Linie CA = ac, und
2. mit dem Astrolab den Verticalwinkel acB (§. 354. Zus.).
3. Nun ist r : tang. acB = ac : aB (§. 324.), also
$$aB = \frac{ac.\,tang.\,acB}{r} = \frac{AC.\,tang.\,acB}{r}.$$
4. Ferner aA = cC, man messe also vom Mittelpuncte des Astrolabes bis auf den Boden, oder die Linie Cc, so ist
5. die gesuchte Höhe, oder
$$AB = Ba + aA = \frac{AC.\,tang.\,acB}{r} + Cc.$$

§. 361.

Aufgabe:

Die Höhe AB (Fig. 203.) messen, wenn man vom Standpuncte C, der mit A in der nemlichen Horizontalebene liegt, nach A nicht kommen kann.

Auflösung:

2. Man nehme in der geraden horizontalen Linie AC in einer Entfernung noch einen Punct D an, so liegen

2. die Dreyecke acB, adB, cdB in der nemlichen Verticalebene.

3. Man messe nun die Standlinie CD, und

4. mit dem Astrolab die Winkel acB und adB.

5. Aus CD, den Winkeln adB, Bcd = 180° − acB berechne man die Seite Bc (§. 331.).

6. Aus Bc, acB berechne man Ba (§. 323.).

7. Dieser Linie addire man die Höhe des Instrumentes cC, so ist Ba + cC = Ba + AA = BA die gesuchte Höhe.

§. 362.

Aufgabe:

Die Höhe AB (Fig. 204.) aus einer Standlinie zu messen, welche mit AB nicht in einer Verticalebene liegt.

Auflösung:

1. Man nehme eine beliebige Horizontallinie CD als Standlinie, und messe sie.

2. Nun stelle man sich durch C, D eine Horizontalebene, und auf sie von B einen Perpendikel BA vor, so ist solcher die Höhe des Punctes B über diese Horizontalebene, und diese Höhe wird gesucht.

3. Man bekömmt also das horizontale Dreyeck CAD, und die beyden verticalen Dreyecke ACB, und ADB.

4. Bey C messe man mit dem Astrolab den horizontalen Winkel ACD $= \alpha$, und den verticalen ACB $= \gamma$.

5. Bey D bestimme man den horizontalen Winkel ADC $= \beta$, und den verticalen ADB $= \delta$.

6. Aus der Seite CD, und den beyden anliegenden Winkeln α, β läßt sich die Seite CA berechnen (§. 131.).

7. Aus CA, und dem Winkel γ kann man im verticalen rechtwinklichten Dreyecke ACB die gesuchte Höhe BA finden (§. 324.).

8. Zur Probe kann man auch Nr. 6. die Seite DA, und aus dieser nebst dem Winkel δ im rechtwinklichten Dreyecke BAD, die Höhe BA suchen, und etwa

9. zwischen diesen beyden gefundenen Höhen (Nr. 7. u. 8.) das arithmetische Mittel für die wahre Höhe annehmen.

Zusatz: Will man aus der Standlinie nur die Höhe Ba bestimmen, so berechne man nach der vorhergehenden Auflösung die Höhe BA, und auf ähnliche Art die Höhe aA, so ist Ba $=$ BA $-$ aA gefunden.

1. Anmerkung: Letzte Aufgabe empfiehlt sich durch ihre Zuverlässigkeit, und ist jener des vorhergehenden §. vorzuziehen.

II. Anmerkung: Von den Methoden vermittels des Barometers, oder des Schattens, oder eines Spiegels die Höhen zu messen, kann erst in der angewandten Mathematik der nothwendige Unterricht ertheilet werden.

§. 363.

Aufgabe:

Ein Feld in Grund zu legen (Fig. 152.), wenn man von einem Puncte O an alle Ecke ungehindert messen kann.

Auflösung:

1. Man messe von O nach allen Ecken, das ist, die Linien OA, OB, OC u. s. f.

2. Mit dem Astrolab messe man die Winkel AOB, BOC, COD u. s. f.

3. Nun verzeichne man aus diesen Seiten, nebst den eingeschlossenen Winkeln, im verjüngten Maaße die Dreyecke aob, boc, cod u. s. f., der Ordnung nach; so ist

4. abcdea der verlangte Grundriß; oder

5. man berechne aus den Seiten Nr. 1. und den Winkeln Nr. 2. die oppönirten Seiten AB, BC, CD, u. s. f. (§. 336.), und verzeichne aus den drey Seiten der Ordnung nach die Dreyecke aob, boc, cod u. s. f., so ist ebenfalls abcdea der verlangte Grundriß.

Der Beweis ist der nemliche, wie §. 208.

Anmerkung: Bey Vermessungen mit dem Astrolab muß man

a. mit gröβter Sorgfalt die gemessenen Seiten und Winkel in das Verzeichniß eintragen,

b. sich durch Zurückvisiren von Zeit zu Zeit von der unverrückten Lage des Astrolabes überzeugen,

c. einen sehr stumpfen Winkel in zwey oder drey andere theilen, und so theilweise die opponirte Seite berechnen.

d. Die Bestimmungen aus Seiten jener aus Winkeln vorziehen.

§. 364.

Aufgabe:

Ein Feld in Grund zu legen (Fig. 154.), welches man bloß umgehen kann, ohne hineinzukommen.

Auflösung:

1. Man messe alle Seiten AB, BC, CD u. s. f., und

2. mit dem Astrolab alle Winkel A, B, C u. s. f.

3. Nun verzeichne man im verjüngten Maaße die Seite ab = AB, und an b den Winkel B (§. 356.).

4. Auf dem andern Schenkel dieses Winkels nehme man bc im verjüngten Maaße = BC, und verzeichne

zeichne wieder c = C, so trage man der Ordnung nach im verjüngten Maaße alle Seiten, und eben so alle Winkel auf, so ist

5. abcdea der verlangte Grundriß (§. 91. u. 180. c.), wo wieder die letzte Seite ea nebst ihren anliegenden Winkeln e, a zur Probe der richtigen Vermessung dienen, wie §. 210.

§. 365.

Aufgabe:

Ein Feld in Gründ zu legen (Fig. 157.), welches man aus zwey Standpuncten F, G ganz übersehen kann.

Auflösung:

1. Man messe die Standlinie FG, und
2. bey F die Winkel AFG, BFG, CFG u. s. f.
3. Ferner bey G die Winkel AGF, BGF, CGF, DGF u. s. f.
4. Nun verzeichne man aus diesen Seiten und Winkeln im verjüngten Maaße die Dreyecke afg, bfg, cfg, dfg, efg, so ist
5. abcdea der verlangte Grundriß.

Der Beweis ist wie §. 213.

Zusatz: Kann man aus zwey Puncten M, N (Fig. 158.) die ganze Figur nicht übersehen, so nehme man noch einen dritten O, berechne aus MN und den Winkeln OMN, und MNO die beyden Seiten MO,

MO, NO (§. 331.), so kann man jede von letztern, als eine neue Standlinie brauchen, und die übrigen Puncte nach der vorhergehenden Aufgabe bestimmen.

§. 366.

Aufgabe:

Den Flächeninhalt eines Feldes anzugeben.

Auflösung:

1. Man lege solches in Grundriß (§. 363—365.),
2. theile letztern durch Diagonalen in Dreyecke, und
3. bestimme den Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes aus §. 343.

Anmerkung: Die trigonometrische Bestimmung des Flächeninhaltes ohne Grundriß findet man in Dazels Goniometrie.

III. Abschnitt.

Vom Nivelliren.

§. 367.

Erklärungen:

a. Wenn ADFGA (Fig. 205.) die Erdkugel vorstellt, so ist jeder Theil der Oberfläche derselben eine Horizontalfläche, und jeder Bogen AD eine Horizontallinie (§. 177. u. 178.).

b.

b. Stellt man sich durch A eine Berührungsebene vor, so steht auf ihr der Radius CA (§. 254. II. Zus.), mithin auch die Richtung der Schwere EC (§. 178. c.) senkrecht; man heißt daher diese Berührungsebene, so wie jede Ebene, auf welche die Richtung der Schwere senkrecht steht,

α. in wieferne ein Theil derselben mit der Oberfläche der Erde, oder dem Horizonte zusammenfällt, ein **Horizontalebene** (§. 179.),

β. in wieferne sie aber doch von der wahren Horizontalfläche unterschieden ist, eine **scheinbare Horizontalfläche.**

c. Zieht man in einer Horizontalebene eine beliebige gerade Linie AB, oder errichtet man auf die Richtung der Schwere AE eine Perpendikularlinie AB, so heißt sie eine **scheinbare Horizontallinie.**

d. Legt man durch die scheinbare Horizontallinie AB und dem Mittelpuncte der Erde C eine Ebene, so ist der Kugelschnitt ADFGA ein größter Kreis (§. 252. I. Zus.), und der Bogen AD, welcher also mit AB in der Ebene dieses Kugelkreises liegt, und durch den Radius AC, und die gerade Linie CB bestimmt wird, ist die **wahre Horizontallinie**, die der scheinbaren AB entspricht.

e. Die Linie BD endlich, um welche der Punct D des wahren Horizonts dem Mittelpuncte der Erde näher liegt, als der entsprechende Punct B vom scheinbaren, heißt das **Gefall von B.**

§. 368.

§. 368.

Erklärungen:

Um die Lage einer scheinbaren Horizontallinie genau zu bestimmen, braucht man als Werkzeuge

a. die sogenannte **Wasser- oder Nivellirwage,**

b. **Absteckstäbe.**

§. 369.

Erklärungen:

Wasserwagen giebt es verschiedene Arten.

a. **Die gewöhnliche sogenannte Wasserwage** (Fig. 206.), wo auf einer metallenen Röhre AB zwey gläserne AC, BD senkrecht eingekittet, und und mit beweglichen Dioptern versehen sind. Wird nun diese Wage so mit Wasser gefüllet, bis solches in den senkrechten Schenkeln zu einer gewissen Höhe z. B. AE, BF steigt, so liegen E und F in der nemlichen Horizontalebene (§. 178. I. Zus.), mithin ist die Linie EF eine scheinbare Horizontallinie (§. 367. c.), die sich vermittels der Dioptern beliebig verlängern und abstecken läßt.

b. **Die Wasserwage vermittels einer Libelle.** Man füllt nemlich (Fig. 207.) einen gläsernen Cylinder AB mit Weingeist, läßt aber noch einen kleinen leeren Raum oder Luftblase C darin, und verschließt solchen genau; mit dieser Libelle wird ein Fernrohr dergestalt verbunden, daß dess. n Axe DE genau mit jener des Cylinders AB parallel läuft.

läuft. Wird nun das ganze Instrument vermittels eines Stativs F so befestiget, daß die Luftblase genau in der Mitte bey C zu stehen kömmt, so ist AB (§. 178. I. Zus.), mithin auch DE horizontal, folglich läßt sich solche wieder beliebig verlängern und abstecken.

c. Die Wasserwage vermittels eines Senkels (Fig. 208.). Mit einem Fernrohre wird eine andere Röhre so verbunden, daß die in letzterer gezogene gerade Linie AB mit der Axe des Fernrohres CD genau einen rechten Winkel macht; ferner wird bey A an einem feinen Silberfaden ein Loth aufgehangen, und damit solches vom Winde nicht bewegt wird, so schließt man die Röhre mit einem Deckel, doch so, daß man unten vermittels eines Fensterchens den Senkel bey B beobachten kann. Wird nun diese Wage vermittels eines eigenen Stativs so gestellt, daß der Senkel, ohne irgend zu streifen, frey in der Richtung AB ruhet, so ist die Richtung der Axe CD vom Fernrohre horizontal (§. 367. c.), man kann also solche nach Belieben verlängern und abstecken.

1. Anmerkung: Die Wasserwage der zweyten Art, oder die bey b. angeführte heißt von ihrem Erfinder Sisson einem englischen Künstler die Sissonische, mit welcher die Brandersche beynahe einerley ist. Die Wasserwage der dritten Art, oder die bey c. angeführte heißt ebenfalls wegen ihrem Erfinder die Picardische.

II.

II. Anmerkung: Nähere Einsicht von der Einrichtung dieser sowohl, als überhaupt der geometrischen Instrumente, und von der Art sie zu prüfen, kann man sich aus Tobias Mayers gründlichen und ausführlichen Unterrichte der practischen Geometrie erwerben.

§. 370.

Erklärung:

Wenn man (Fig. 205.) bey A vermittels einer Wasserwage die scheinbare Horizontallinie AB abstecken will, so muß man bey D einen Stab senkrecht auf dem Boden setzen, auf welchen sich der Punct B bemerken, und die Höhe eben dieses Punctes über den Boden angeben läßt. Diesem doppelten Zwecke zufolge kann man sich

1. zwey prismatische Stäbe ab, cd (Fig. 209.), jeden etwa 8 Schuhe lang, verfertigen lassen.

2. Den einen Stab ab lasse man mit einem stärken eisenen Stift bey b beschlagen, und theile dann von b gegen a zu den ganzen Stab in Schuhe, Zolle, und Linien.

3. Nun theile man den Stab cd ebenfalls in Schuhe, Zolle, und Linien, und befestige an selben zwey Brettchen, eines unten, das andere oben, ziehe auf solchen die Linien dr, ux so, daß sie genau mit einem Theilungsstriche des Stabes in eine gerade Linie fallen, und ihre Entfernung du eine

bestimmte ganze Zahl von Schuhen, Zollen, und Linien giebt.

4. Um die Linien dr, ux recht sichtbar zu machen, kann man die eine Hälfte der Brettchen schwarz, und die andere weiß anstreichen lassen.

5. Der Stab cd muß endlich mit dem Stabe ab so verbunden werden, daß er sich auf- und abwärts verschieben, und in jeder Lage befestigen läßt, wozu die Bänder und Schrauben bey g dienen.

6. Auf der entgegengesetzten Seite der Stäbe sowohl, als der Brettchen muß alles eben so eingetheilt, und verzeichnet, so wie endlich

7. diese ganze Einrichtung doppelt vorhanden seyn.

§. 371.

Aufgabe:

Von A nach einen gegebenen Punct D (Fig. 205.) die scheinbare Horizontallinie bestimmen.

Auflösung:

1. Bey A stelle man die Nivellirwage horizontal, und visire nach D, oder vielmehr nach B.

2. Durch einen Gehilfen lasse man bey D die Nivellirstäbe (Fig. 209.) senkrecht auf den Boden setzen, und

3. den Stab cd längst ab so lange verschieben, bis man im Fadenkreuze des Perspectives oder der Diopter

Dioptern die Linie dr, ux erblickt, so daß also B mit d, oder u zusammenfällt.

4. In dieser Lage wird der Stab cd befestiget.

5. Nun bestimme man auf diesen Stäben die Linie ub, so hat man die Höhe des Punctes B über D, wenn B mit u zusammentrifft; paßt hingegen B auf d, so addire man der Länge ub noch du, so ist db = DB.

6. Endlich messe man AB, so ist diese scheinbare Horizontallinie der Größe und Lage nach bestimmt.

Zusatz: Da man auf dem Boden messen muß, so wird eigentlich nicht die Tangens AB, sondern statt derselben der Bogen AD gemessen, welche aber, da AD wohl nicht größer, als 4000 Toisen seyn kann, weil man sonst auf den Stäben die Abtheilungen nicht mehr unterscheiden kann, so wenig von einander unterschieden sind, daß man diesen Unterschied ganz außer Acht lassen darf. Denn es ist AC : AB = r : tang. ACB, mithin tang. ACB = $\frac{r. AB}{AC}$; setzet man nun den mittlern Halbmesser der Erde, oder AC = 3267692, so ist

log. r. AB = 13,6020600
log. AC = 6,5142412

log. tang. ACB = 7,0878188, folglich
ACB = 0° 4′ 12″ und beynahe 32‴.

Suchet man endlich für diesen Winkel, und dem Halbmesser AC den Bogen AD (§. 129.), so ist der

Unterschied, welcher noch gröſtentheils von der Natur der Logarithmen, und andern Irrationalverhältnissen abhängt, nicht 0,4 einer Toise, welches schon für sich klar ist, weil für obigen Winkel die Sinus und die Tangens in den Tabellen noch nicht um 0,0000001 des Halbmessers verschieden sind.

§. 372.

Lehrsatz:

Wenn für eine Gegend der Halbmesser der Erde AC $= a$, und eben so die entsprechende Länge eines Grades n im nemlichen Längenmaaße wie die Entfernung AD $=$ AB $= c$ (wo man den Bogen statt der Tangens setzen darf §. 371. Zus.), bestimmt, und die Länge des Bogens von 30′ in Theilen des Halbmessers $=1$ gesetzt wird, so ist das Gefäll BD $= x$.

$$\text{I. } x = \frac{c^2}{2a}.$$

$$\text{II. } x = \frac{30'}{n}.\, c^2.$$

Beweis:

1. $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (§. 96. II. Zus.), oder
   $(a + x)^2 = a^2 + c^2$, das ist,
   $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + c^2$.

2. Nun ist x im Verhältnisse zu a, mithin um so mehr x^2 in Rücksicht von $a^2 + 2ax$ sehr klein, so daß man also

3. $a^2 + 2ax = a^2 + c^2$, oder
   $2ax = c^2$ setzen darf, folglich

4.

4. *Nr. I.* $x = \frac{c^2}{2a}$.

5. AC : AB = 1 : tang. C (S. 324.), oder
a : c = 1 : tang. C, also

tang. C = $\frac{c}{a}$.

6. Da nun die Tangens C, weil der Winkel nur sehr klein angenommen wird, gleich dem Bogen C ist, so wird

7. C = $\frac{c}{a}$ für den Halbmesser 1.

8. Bezeichnet nun n die Größe eines Grades der Erde im Längenmaaße, nach welchen a, und c bestimmt sind, so ist
n : c = 1° : C, also

9. C = $\frac{c}{n}$. 1°, folglich

10. $x = \frac{c^2}{2a}$ (Nr. 4.) = $\frac{1}{2}$ c. $\frac{c}{a}$

= $\frac{1}{2}$ c. C (Nr. 7.) = $\frac{1}{1}$ c. $\frac{c}{n}$. 1°
(Nr. 9.)

= $\frac{c^2}{n}$. $\frac{1}{2}$ 1°, also *Nr. II.*

11. $x = \frac{c^2}{n}$. 30′ = $\frac{30'}{n}$. c^2.

1. Zusatz: Für Baiern kann man immer einen Grad oder n = 342432 Pariser Fuß (Arithm. Seite 454)
= 57072

= 57072 Toiſen, und alſo den Erdhalbmeſſer a = 3269985 Toiſen, alſo den Diameter, oder 2a = 6539970 Toiſen ſetzen. Ferner iſt für den Halbmeſſer 1 der Bogen von 30′ = 0,000872665....

II. Zuſatz: Weil in der Formel Nr. I. der Diameter 2a, und in der Formel Nr. II. $\frac{30'}{n}$ für einen gegebenen Ort beſtändige Größen ſind, ſo iſt es vortheilhaft, die Logarithmen davon immer beſtimmt an der Hand zu haben. Für Baiern iſt

I. log. 2a = 6,8155757
log. 30′ = 5,9408470—8 (§. 246. Arith.)
log. n = 4,7564231 ; alſo

II. log. $\frac{30'}{n}$ = 1,1844243—8
= 0,1844243—7.

§. 373.

Aufgabe:

Für die Entfernung AD = c = 4000 Toiſen (Fig. 205.) das Gefäll BD = x ſuchen.

I. Auflöſung:

Für c = 4000 Toiſen; iſt c^2 = 16000000, alſo
log. c^2 = 7,2041200
log. 2a = 6,8155757 (§. 272. II. Zuſ. 1.)

log. x = 10,3885443 (§. 372. Nr. I.),
folglich das Gefäll x = 2,446494 Toiſen.

II.

II. Auflösung:

$$\log. c^2 = 7,2041200$$

$$\log. \frac{30'}{n} = 0,1844243 - 7 \quad (\S. 372. \text{ II. Zus.})$$

also $\log. x = 0,3885443$ — (§. 372. II.).

Und das Gefäll $x = 2,446494$ Toisen.

§. 374.

Erklärungen:

a. Wenn für einen gegebenen Punct A auf der Oberfläche der Erde (Fig. 210.) der Bogen FAE die wahre Horizontallinie ist, so liegt der Punct f dem Mittelpuncte der Erde C näher, als A, folglich würde das Wasser von A nach f fließen, man heißt also den Unterschied Ff zwischen AC, oder FC, und fC die Tiefe, oder das Fallen des Punctes, f unter A.

b. Da hingegen e weiter vom Mittelpuncte C entfernt ist, als A, so würde das Wasser von e nach A fließen, e liegt also höher, als A, und man nennt den Unterschied eF zwischen eC und AC oder CE, die Höhe, oder das Steigen des Punctes e über A.

c. Das Steigen oder Fallen eines Punctes in Rücksicht eines gegebenen Punctes A auf der Oberfläche der Erde bestimmen, heißt Wasserwägen, oder Nivelliren.

§. 375.

§. 375.

Aufgabe:

Von A nach e, oder nach f (Fig. 210.) zu nivelliren.

Auflösung:

1. Man bestimme aus A die scheinbaren Horizontallinien AB, oder AD (§. 371.).

2. Messe solche, und eben so an den Nivellirstäben die Linien Be, und Df.

3. Nun bestimme man für beyde Weiten die Gefälle BE und DF nach §. 372. Nr. I. oder II.

4. Für den Punct e ziehe man vom Gefälle BE die Linie Be ab, so ist BE — Be = eE die Höhe des Punctes e über A.

5. Für den Punct f hingegen ziehe man von Df (Nr. 2.) das Gefäll DF ab, so ist Df — DF = Ff die gesuchte Tiefe des Punctes f unter A.

§. 376.

Aufgabe:

Von A nach B (Fig. 211.) zu nivelliren, ohne daß man das Gefäll zu bestimmen nöthig hat.

Auflösung:

1. Man bringe die Wasserwage genau in die Mitte E zwischen A und B, und bestimme

2. vermittels der Nivellirstäbe (Fig. 209.) bey A und B die scheinbaren Horizontallinien FG, und FH.

3. Nun messe man an den Stäben die Linien GA, HB.

4. Ziehe von der grössern die kleinere ab, so giebt der Unterschied die gesuchte Höhe oder Tiefe des Punctes B unter A, je nachdem HB grösser, oder kleiner als AG ist; in der Figur ist

5. HB > GA, mithin HB — GA die Tiefe von B.

Beweis:

6. Offenbar ist DB das Fallen, oder die Tiefe von B unter A.

7. Man stelle sich nun nach dem Mittelpuncte der Erde C die geraden Linien GC, FC, HC vor, so ist

8. AC = DC als Radien, ferner

9. CF = CF; FG = FH (N. 1.) CFG = 90° = CFH, mithin △GCF = △HCF, also

10. GC = HC
AC = CD (Nr. 8.), mithin

GC — AC = HC — CD, oder AG = DH, folglich

11. BD = BH — DH = BH — AG das gesuchte Fallen des Punctes B.

1. Zusatz: Die Auflösung bleibt noch wahr, wenn schon die Wasserwage nicht ganz genau in der Mitte zwischen A und B zu stehen kömmt, wenn nur die Abweichung davon nicht beträchtlich ist; man hat also nicht nothwendig, die Linie AB zu messen, um

ihre

ihre Mitte zu bestimmen, durch Abschritten, und manchmal durch das bloße Augenmaaß läßt das Mittel, oder der Punct E mit hinlänglicher Schärfe angeben, denn bey geringer Abweichung ist der daraus entspringende Fehler so unbeträchtlich, daß man solchen nicht in Anschlag zu bringen hat.

II. Zusatz: Ist die Entfernung des Punctes B von A zu groß, als daß man in der Mitte an den Stäben die Abtheilungen unterscheiden könnte, so nimmt man mehrere Puncte dazwischen an, und bestimmt so theilweise das Steigen oder Fallen.

§. 377.

Erklärungen:

Wenn die Bestimmung des Steigens oder Fallens zweyer nicht sehr weit entfernter Oerter eben nicht auch mit der größten Genauigkeit gefodert wird, so ist die **Rothische Bergwage** (von ihrem Erfinder **Georg Rothe**, Professor in Görlitz, also genannt) sehr bequem. Das Wesentliche dieser Bergwage besteht (Fig. 212.)

a. in einem Richtscheite AB mit zwey gleich langen und mit Eisen beschlagenen Schenkeln AD, BE, welche

b. auf AB senkrecht stehen, und deren Entfernung DE genau 10 Schuhe ist.

c. In der Mitte des Richtscheites ist senkrecht ein Arm FG eingezapft, von der Länge von 2 oder $2\frac{1}{2}$ Schuhe,

2½ Schuhe, damit man das Instrument bequem tragen und halten kann.

d. An diesem Arme ist oben ein viereckigtes Brett von der Länge HI = 16 Zoll, und der Breite HN = 8 Zoll, so befestiget, daß die Seite, oder Länge HI genau mit AB, also auch mit DE, parallel läuft.

e. Aus der Mitte C von HI ist ein Halbkreis verzeichnet, und in einzelne Grade getheilt von I gegen H zu, so daß bey I. 0°, bey n. 90° und bey H 180° zu stehen kömmt.

f. Im Mittelpuncte C hängt endlich ein Senkel Cr so, daß er frey spielen kann.

I. Zusatz: Wenn man auf den abhängigen Boden EDZ die Bergwage senkrecht setzet, und durch E sich in dieser Verticalebene die Horizontallinie EK vorstellt, bis solche vom Perpendikel DK durchschnitten wird, so ist DK die Höhe, und KE die horizontale Weite des Punctes D in Rücksicht auf E.

II. Zusatz: Der Winkel ICr = m, weil HI ∥ DE (Erkl. d.), ferner m = EDK, weil Cp ∥ DK, also ist ICr = EDK, und Sin. ICr = Sin. EDK.

III. Zusatz: DEK = 90° — EDK = 90° — ICr, also Sin. DEK = Cos. ICr (§. 287.).

IV. Zusatz: DE : DK = r : Sin. DEK, also für DE = 10 Fuß, und den Radius = r, wird, 10 : DK = r

= 1 : Cos. ICr, und DK = 10. Cos. ICr, man beobachte also den Winkel ICr, schlage in den Tafeln für den Halbmesser 1 den Cosinus dieses Winkels auf, multiplicire solchen mit der Zahl 10, so giebt das Product die Höhe DK im nemlichen Fußmaaße, in welchen DE der Wasserwage bestimmt ist.

V. Zusatz: DE : KE = r : Sin. EDK, oder
10 : KE = 1 ; Sin. ICr, also KE = 10. Sin. ICr, welche die horizontale Weite im gebrauchten Fußmaaße der Bergwage ist.

VI. Zusatz: Wenn D tiefer als E liegt, so wird der Winkel ICr stumpf, wo sich leicht wieder alles Bisherige anwenden läßt.

§. 378.

Aufgabe:

Zwischen zwey Puncten E, Z auf einem unebenen Boden das Steigen oder Fallen, und ihren horizontalen Abstand suchen.

Auflösung:

1. Man setze bey Z, wenn man von E nach Z nivelliren will, einen senkrechten Stab zZ.

2. In der Verticalebene EzZ bestimme man mit der Rothischen Bergwage sowohl das Steigen und Fallen, als die horizontalen Abstände (§. 377. IV. u. V. Zus.) theilweise.

3. Am Ende giebt die Summe aller Abstände die gesuchte Weite, und der Unterschied der gefundenen Höhen und Tiefen, oder ihre Summe, im Falle alle dazwischen liegende Puncte immer höher, oder tiefer liegen, das gesuchte Steigen oder Fallen von Z in Rücksicht E.

IV. Hauptstück.

Die sphärische Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Von sphärischen Dreyecken, ihren Winkeln, und Seiten überhaupt.

§. 379.

Lehrsatz:

Wenn ein Kugelkreis APBQA (Fig. 174.) durch die Pole P, Q eines andern größten oder kleinern Kugelkreises AEFBA geht, so ist er ein größter Kreis, steht auf letztern senkrecht, und halbiret ihn.

Beweis:

1. In der Axe PQ liegt der Mittelpunct der Kugel C, und der Mittelpunct H des Kreises AEFCA, auf

auf deſſen Ebene PQ zugleich ſenkrecht ſteht (§. 253. b. II. u. III. Zuſ.).

2. Nun liegt vermöge der Annahme PQ in der Ebene des Kreiſes AEBQA, folglich iſt ſolcher ein größter Kreis (§. 252. I. Zuſ.), und ſteht

3. auf dem Kreiſe AEFBA ſenkrecht (§. 170.).

4. Da endlich die Durchſchnittslinie AB der beyden Kreiſe durch den Mittelpunct des letztern geht, alſo im Diameter deſſelben iſt, ſo halbirt auch der Kreis APBQA den andern AEFBA (§. 17. IV. Zuſ.).

I. Zuſatz: Wenn ein größter Kugelkreis APBQA auf einem andern größten oder kleinern Kugelkreiſe AEFBA ſenkrecht ſteht, ſo geht er durch deſſen Pole, und halbirt ihn. Denn vom Mittelpuncte C des größten Kreiſes, welcher zugleich Mittelpunct der Kugel iſt, fälle man auf die Ebene des andern Kreiſes AEFBA einen Perpendikel CH, ſo liegt ſolcher ganz in der Ebene des erſtern oder größten Kreiſes APBQA (§. 170. II. Zuſ.), geht durch den Mittelpunct H (§. 252. II. Zuſ.), und die beyden Pole P, Q des andern Kreiſes (§. 253. I. Zuſ.), folglich geht auch der Kreis APBQA durch dieſe Pole des Kreiſes AEFBA, und halbiret ihn (Lehrſ.).

II. Zuſatz: Wenn zwey größte Kreiſe PLQKP, KDLOK (Fig. 175.) auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo geht jeder durch die Pole des andern (I. Zuſ.).

III. Zusatz: Wenn die Durchschnittslinie PQ mehrerer größter Kreise auf die Ebene eines andern größten Kreises KDLOK senkrecht steht, so steht letzterer Kreis auf alle obige Kreise senkrecht (§. 170. VI. Zus.) und geht also durch die Pole eines jeden (I. Zus.).

IV. Zusatz: Wenn P der Pol von einem größten KDLOA, oder kleinern Kugelkreise MGNM ist, so steht solcher von allen Puncten der Peripherien obiger Kreise, wenn man diese Entfernungen auf der Oberfläche der Kugel durch größte Kreise bestimmt, gleich weit ab, das ist, die Bögen PK, PD, PE sind einander gleich, und eben so ist der Bogen PM = PG = PH. Denn die Sehnen PK, PD, PE, und eben so die Sehnen PM, PG, PH sind gleich (§. 253. 2.) folglich auch ihre genannte Bögen (§. 64. II. Zus.).

V. Zusatz: Der Pol P ist von allen Puncten seines größten Kugelkreises KDLOK um einen Quadranten oder 90° entfernt. Denn die Axe PQ geht durch den Mittelpunct C der Kugel sowohl, als seines größten Kreises, und steht auf seiner Ebene senkrecht (§. 253. II. u. III. Zus.), also ist PCD = PCE = 90° (§. 162.), und ihre Bögen PD, PE sind folglich Quadranten (§. 66. II. Zus.).

VI. Zusatz: Wenn man auf einem größten Kreise KDLOK einen andern größten Kreis PDQ senkrecht setzet, und auf letztern von D den Quadranten DP nimmt, so ist P der Pol des Kreises KDLOK. Denn PCD = 90° (§. 66. III. Zus.), also ist PC auf die

Durch-

Durchschnittslinie beyder Kreise CD, also auf den Kreis KDLOK senkrecht (§. 170. III. Zus.), geht durch desselben Mittelpunct C, folglich ist P dessen Pol (§. 253. I. Zus.).

VII. Zusatz: Wenn PD, PE Quadranten zweyer größter Kreise sind, so steht ein größter Kreis durch D, E auf beyden senkrecht, und geht durch ihre Pole. Denn PCD = 90° = PCE (§. 66. III. Zus.), mithin ist die Durchschnittslinie PQ der beyden Kreise PDQ, PEQ auf dem Kreise KDELOK senkrecht (§. 163.), folglich steht letzterer Kreis auf beyden erstern senkrecht (§. 170. VI. Zus.), und geht also auch durch ihre Pole (I. Zus.).

§. 380.

Lehrsatz:

Der Neigungswinkel zweyer größter Halbkreise PDQ, PEQ (Fig. 175.) hat so viele Grade, als der Bogen DE eines größten Kreises zwischen ihnen, welcher durch die Endspuncte der Quadranten PD, PE gelegt ist.

Beweis:

1. Der Winkel PCD = PCE = 90° (§. 66. III. Zus.), also steht die Durchschnittslinie PQ der beyden Halbkreise PDQ, PEQ auf dem größten Kreise KDELOK senkrecht (§. 163.), mithin ist
2. DCE der Neigungswinkel der beyden Halbkreise (§. 171. I. Zus.), und hat
3. den Bogen DE zum Maaße (§. 67. II. Zus.).

I. Zu-

I. Zusatz: Der Neigungswinkel DCE zweyer grösster Kreise PDQ, PEQ ist dem Winkel AQB ihrer Tangenten am Durchschnittspuncte Q gleich. Denn CD # QA, CE # QB (§. 42. II.), mithin DCE # AQB (§. 169.).

II. Zusatz: Wenn a, α (Fig. 213.) die Pole des grösten Kreises PAQEP, und b, β die Pole des grösten Kreises PBQDP sind, so ist I. ab = AB = ACB, und II. a β = dem Bogen AFD = dem Winkel ACD, das heißt, die Entfernung der beyden Pole a, b, welche auf einer Seite der Kreise liegen, ist dem spitzigen Winkel ACB, und die Entfernung der Pole a, β, welche auf verschiedenen Seiten dieser Kreise liegen, ist dem stumpfen Winkel ACD der Kreise gleich:

Denn Aa = 90° = Bb (§. 379. V. Zus.), das ist Ab + ab = AB + Ab, folglich
I. ab = AB = ACB (§. 67. II. Zus.):

Eben so ist aβ = bβ − ab = 180° − AB (N. I.)
AFD = BFD − AB = 180° − AB; also
II. aβ = AFD = ACD.

§. 381.

Erklärungen:

a: Der Winkel APB (Fig. 213.), welchen die Bögen PA, PB zweyer grösster Kreise machen, heißt ein sphärischer Winkel.

b. Der Punct P heißt der Scheitel, und die Bögen PA, PB die Schenkel desselben.

I. Zusatz: Der sphärische Winkel APG ist dem Winkel rPn der Tangenten dieser Kreise am Durchschnittspuncte P gleich; denn unendlich kleine Theile der Tangenten fallen mit ihren Bögen zusammen, haben also mit solchen gleiche Neigung (§. 271. Nr. 3.).

II. Zusatz: Der sphärische Winkel APG ist dem Neigungswinkel der Kreisebenen selbst gleich, und hat also zum Maaße den Bogen AG eines größten Kreises, welcher durch die Endspuncte A, G der zu Quadranten verlängerten Schenkel gelegt ist. Denn APG = rPn (I. Zus.) = ACG (§. 380. I. Zus.) = AG (§. 67. II. Zus.).

III. Zusatz: Wenn P der Pol für den größten Kreis durch AG ist, so ist der Bogen AG das Maaß des sphärischen Winkels APG. Denn AP und GP sind Quadranten (§. 379. V. Zus.), folglich ist der Bogen AG das Maaß des sphärischen Winkels APG (II. Zus.).

IV. Zusatz: Sphärische Scheittelwinkel sind gleich, das ist, APG = EPF. Denn APG = rPn; EPF = pPm; nun ist rPn = pPm (§. 13. Zus.), also APG = EPF.

V. Zusatz: Zwey sphärische Nebenwinkel halten zusammen 180°, das ist, GPA + APF = 180°; denn GPA = nPr; APF = rPm; nun ist nPr + rPm = 180° (§. 14. II. Zus.), also GPA + APF = 180°.

§. 382.

§. 382.

Erklärungen:

a. Jeder Theil der Oberfläche der Kugel APB, BPC (Fig. 213.), welcher von drey Bögen gröſster Kreiſe begränzet wird, heiſst ein **sphäriſches Dreyeck.**

b. Die sphäriſchen Winkel heiſsen die **Winkel**, und die Bögen die **Seiten** dieſes Dreyeckes.

I. **Zuſatz:** Man kann jedes sphäriſche Dreyeck so beſtimmen, daſs jede ſeiner Seiten, und jeder ſeiner Winkel kleiner, als 180° iſt; nur auf Dreyecke dieſer Art werden die Unterſuchungen der sphäriſchen Trigonometrie eingeſchränket.

II. **Zuſatz:** Zieht man im sphäriſchen Dreyecke ADB (Fig. 214.) von allen Ecken nach dem Mittelpuncte C der Kugel die Radien, ſo ſind die Seiten des Dreyeckes AB, AD, BD ſo groſs, als die entſprechenden Centriwinkel ACB; ACD, BCD (§. 67. II. Zuſ.), man kann alſo ſtatt einer Seite ſeinen Centriwinkel, und ſtatt letztern erſtere ſetzen, weil man nur die Gröſse des Bogens in Graden, Minuten u. ſ. w. verlangt.

III. **Zuſatz:** Wenn man vom Ecke D auf die Ebene ACB der entgegen ſtehenden Seite das Loth DO (§. 166.), und auf die Durchſchnittslinien AC, BC dieſer Ebene mit den Ebenen der andern zwey Seiten, die Perpendikel Dm, Dn; ferner in der erſten

Ebene ACB die geraden Linien mo, no zieht, ſo ſteht mo auf AC, und no auf BC ebenfalls ſenkrecht (§. 166. III. Zuſ.), folglich iſt

a. Dmo der Neigungswinkel der beyden Seitenebenen ACB, ACD (§. 169. II. u. III. Zuſ.), alſo Dmo dem ſphäriſchen Winkel BAD gleich (§. 381. II. Zuſ.).

b. Eben ſo iſt Dno = DBA: ferner

c. Dm = Sin. ACD = Sin. AD; Cm = Cos. ACD = Cos. AD.

d. Dn = Sin. BCD = Sin. BD; Cn = Cos. BCD = Cos. BD.

IV. Zuſatz: Die Seitenebenen eines ſphäriſchen Dreyeckes bilden im Mittelpuncte C der Kugel einen körperlichen Winkel, folglich iſt ACB + ACD + BCD < 360° (§. 224 Zuſ.), alſo auch AB + AD + BD < 360° (II. Zuſ.), das iſt, alle drey Seiten eines ſphäriſchen Dreyeckes ſind zuſammen kleiner, als 360°.

§. 383.

Erklärungen:

a. So wie die Winkel, heißen auch die Seiten ſphäriſcher Dreyecke, der Kürze wegen, ſpitzig, oder ſtumpf, je nachdem ſie kleiner, oder größer als 180° ſind.

b. Zwey Winkel, oder zwey Seiten, oder ein Winkel und eine Seite heißen gleichartig, wenn ſie beyde ſpitzig, oder beyde ſtumpf ſind; ungleichartig, wenn eines der beyden Stücke ſpitzig, das andere ſtumpf iſt.

§. 384.

§. 384.

Erklärungen:

a. Ein Dreyeck, welches einen rechten Winkel hat, heißt **rechtwinklicht**, im Gegentheile **schiefwinklicht**.

b. Im sphärischen rechtwinklichten Dreyecke ABH (Fig. 215.) heißt die Seite AB, welche dem rechten Winkel H gegenübersteht, die **Hypothenuse**, und die Seiten AH, BH, welche den rechten Winkel einschließen, die **Perpendikel**.

c. Im schiefwinklichten Dreyecke ABD (Fig. 216. u. 217.), wenn man eine Seite AD zur Grundlinie annimmt, heißt der Bogen BH, welcher durch die Spitze B auf ihr (Fig. 317.), oder auf ihrer Verlängerung (Fig. 216.) senkrecht steht, der **Perpendikel** dieses Dreyeckes.

Zusatz: In einem sphärischen rechtwinklichten Dreyecke kann ein Winkel H (Fig. 215.), oder zwey wie im Dreyecke BPG (Fig. 213.) die Winkel B, G, oder alle drey rechte Winkel seyn, z. B. im Dreyecke APG, wenn AG ebenfalls ein Quadrant ist; oder es können zwey Winkel rechte, z. B. B, F im Dreyecke BPF, und der dritte P stumpf seyn.

II. Abschnitt.

Von rechtwinklichten Dreyecken.

§. 385.

Erklärungen:

a. Zur Bequemlichkeit wird in der Folge der rechte Winkel mit H, und die Hypothenuse AB des rechtwinklichten Dreyeckes AHB (Fig. 215.) mit h,

b. die beyden schiefen Winkel mit A, B, hingegen ihre entgegenstehenden Perpendikel BH, AH mit den kleinern Buchstaben a, b bezeichnet.

c. Bey schiefwinklichten Dreyecken bezeichnen A, B, D die Winkel, und a, b, d der Ordnung nach die gegenüberstehenden Seiten.

§. 386.

Lehrsatz:

Im rechtwinklichten Dreyecke ABH (Fig. 215.) verhält sich der Radius zum Sinus der Hypothenuse, wie der Sinus eines schiefen Winkels zum Sinus seines entgegenstehenden Perpendikels, das ist:

$$r : \text{Sin. } h = \text{Sin. } A : \text{Sin. } a.$$

Beweis:

1. Man ziehe von allen Ecken des Dreyeckes nach dem Mittelpuncte der Kugel C die Radien AC, BC, HC;

2. vom schiefen Winkel B fälle man auf die Radien HC und AC die Lothe Bn, Bm, so steht

3. Bn auf der Ebene ACH (§. 170. I. Zus.), und

4. nm auf dem Radius AC senkrecht (§. 166. III. Zus.), also

5. Bmn = A, Bm = Sin. AB = Sin. h, Bn = Sin. BH = Sin. a (§. 382. III. Zus.).

6. Bm : Bn = r : Sin. Bmn (§. 323.), das ist,
Sin. h : Sin. a = r : Sin. A, oder
Sin. h : r = Sin. a : Sin. A, folglich auch (§. 213. Arithm.)

7. r : Sin. h = Sin. A : Sin. a.

Zusatz: Eben so ist auch:
r : Sin. h = Sin. B : Sin. b.

§. 387.

Lehrsatz:

In jedem rechtwinklichten Dreyecke AHB (Fig. 215.) verhält sich der Radius zum Sinus eines Perpendikels, wie die Tangens des anliegenden schiefen Winkels, zur Tangens des andern Perpendikels, welcher dem schiefen Winkel gegenübersteht, das ist:

r : Sin. b = tang. A : tang. a.

Beweis:

1. mn : Bn = r : tang. Bmn
Cn : Bn = r : tang. BCn
} (§. 324.), also

3.

2. Cn : mn = tang. Bmn : tang. BCn (§. 218. III. Anm.), Cn : mn = r : Sin. mCn (§. 323.), mithin

3. r : Sin. mCn = tang. Bmn : tang. BCn, das ist:

4. r : Sin. b = tang. A : tang. a.

I. Zusatz: r : Sin. b = cot. a : cot. A (§. 303. II. Zus.).

II. Zusatz: Eben so ist auch:

$$r : \text{Sin. } a = \text{tang. } B : \text{tang. } b = \text{cot. } b : \text{cot. } B.$$

III. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreyecke ist jeder schiefe Winkel mit seinem gegenüberstehenden Perpendikel gleichartig. Denn $\text{tang. } A = \frac{r \cdot \text{tang. } a}{\text{Sin. } b}$ (Lehrs.), nun ist Sin. b allemal positiv (§. 292. IX. Zus.), ist also der Perpendikel a spitzig, so ist tang. a (§. 301. III. Zus.), folglich auch tang. A positiv (§. 62. Zus. Arithm.), also der Winkel A spitzig. Ist hingegen a stumpf, also tang. a negativ, so wird auch tang. A negativ, folglich der Winkel A stumpf seyn. Eben so umgekehrt muß der Perpendikel a spitzig oder stumpf seyn, je nachdem der Winkel A spitzig, oder stumpf ist. Da endlich $\text{tang. } B = \frac{r \cdot \text{tang. } b}{\text{Sin. } a}$, so gilt alles Bisherige für den Perpendikel b und seinem opponirten schiefen Winkel B.

IV. Zusatz: Wenn im rechtwinklichten Dreyecke beyde Perpendikel spitzig sind, so sind auch die beyden schiefen Winkel spitzig, und wenn die beyden erstern stumpf

stumpf sind, so sind die beyden letztern stumpf, und umgekehrt.

§. 388.

Lehrsatz:

Wenn man im rechtwinklichten Dreyecke AHB (Fig. 218.) zwey Seiten, welche einen schiefen Winkel z. B. A einschließen, zu Quadranten AE, AD verlängert, durch D, E einen größten Kreis legt, so erhält man wieder ein rechtwinklichtes Dreyeck BEF, welches zum vorigen AHB folgende Verhältnisse hat:

I. $B = B$; $E = 90° = H$; $F = 90° - AH = 90° - b = \text{compl. } b$.

II. $BE = 90° - AB = 90° - h = \text{compl. } h$;
$BF = 90° - BH = 90° - a = \text{compl. } a$;
$FE = 90° - A = \text{compl. } A$.

Beweis:

1. AD, AE sind Quadranten (ex constr.), also stehen sie
2. auf dem Kreise durch DE senkrecht (§. 379. VII. Zus.), und eben so stehen
3. die Kreise durch D, E und B, H auf dem Kreise durch A, D senkrecht, folglich ist
4. F der Pol des letztern Kreises, und FD, FH sind Quadranten (§. 379. II. u. V. Zus.)
5. Folglich ist $B = B$ (§. 381. IV. Zus.), $E = 90° = H$ (Nr. 2.), $F = DH$ (§. 381. II. Zus.) $= AD - AH = 90° - b$ (N. 1.) $= \text{compl. } b$ (§. 286.).

6.

6. $BE = AE - AB = 90° - h$ (N. 1.) = compl. h
$BF = FH - BH = 90° - a$ (Nr. 4.) = compl. a
$FE = FD - DE$, und $A = DE$ (§. 381. II. Zuſ.),
alſo
$FE = FD - A = 90° - A$ (Nr. 4.) = compl. A.

Zuſatz: Wenn im rechtwinklichten Dreyecke nicht alle drey Seiten, und die beyden ſchiefen Winkel, wie im Dreyecke AHB ſpitzig, ſondern einige dieſer Stücke, wie z. B. im Dreyecke GHB der Perpendikel GH, die Hypothenuſe AB, und der Winkel GBH ſtumpf ſind, ſo nehme man wieder $GE = GD = 90°$, lege durch D, E einen größten Kreis, ſo hat das Dreyeck BFE zum Dreyecke GHB die im Lehrſatze aufgeſtellten Verhältniſſe. Denn

I. $FBE = 180° - B$ = Suppl. B (§. 292.); $E = 90° = H$
$F = HD = GH - GD = b - 90°$ = compl. b (§. 286.)

II. $BE = GB - GE = h - 90°$ = compl. h
$BF = FH - BH = 90° - g$ = compl. g
$FE = FD - ED = 90° - G$ = compl. G.

§. 389.

Lehrſatz:

Im rechtwinklichten Dreyecke AHB (Fig. 218.) verhält ſich der Radius zum Coſinus des einen Perpendikels, wie der Coſinus des andern zum Coſinus der Hypothenuſe, das iſt:

$$r : \text{Cos. } a = \text{Cos. } b : \text{Cos. } h.$$

Be-

Beweis:

Man verzeichne nach der Anleitung des 388. §. das rechtwinklichte Dreyeck BEF, so ist

r : Sin. BF = Sin. F : Sin. BE (§. 386.), das ist:

r : Cos. a = Cos. b : Cos. h.

I. Zusatz: Wenn die Perpendikel gleichartig sind, so ist die Hypothenuse spitzig; sind hingegen erstere ungleichartig, so ist letztere stumpf. Denn Cos. h $= \frac{\text{Cos. a. Cos. b}}{\text{r}}$. Sind nun a, b beyde spitzig, so sind ihre Cosinuse, also auch das Product derselben, folglich auch der Cos. h positiv, mithin h spitzig; eben so, wenn a, b beyde stumpf, also ihre Cosinuse negativ sind, so ist ihr Product, mithin auch Cos. h wird positiv, also h ebenfalls spitzig: sind hingegen a, b ungleichartig, nemlich ein Perpendikel spitzig, der andere stumpf, so ist der Cosinus des ersten positiv, des andern negativ, also ihr Product, mithin auch Cos. h negativ, folglich h stumpf.

II. Zusatz: Wenn die Hypothenuse spitzig ist, so sind die beyden Perpendikel gleichartig: und wenn erstere stumpf ist, so sind letztere ungleichartig.

§. 390.

Lehrsatz:

Der Radius verhält sich zum Cosinus eines Perpendikels, wie der Sinus des anliegenden schiefen Winkels, zum Cosinus des entgegenstehenden Winkels, das ist (Fig. 218.), r : Cos. a = Sin. B : Cos. A.

Beweis:

r : Sin. BF = Sin. B : Sin. FE (§. 386.), alſo
r : Cos. a = Sin. B : Cos. A (§. 388.).

Zuſatz: r : Cos. b = Sin. A : Cos. B.

§. 391.

Lehrſatz:

Der Radius verhält ſich zum Coſinus eines ſchiefen Winkels, wie die Cotangens des anliegenden Perpendikels zur Cotangens der Hypothenuſe, das iſt (Fig. 218.), r : Cos. A = cot. b : cot. h.

Beweis:

r : Sin. FE = tang. F : tang. BE (§. 387.), alſo
r : Cos. A = cot. b : cot. h (§. 388.).

I. Zuſatz: r : Cos. B = cot. a : cot. h.

II. Zuſatz: r : Cos. A = tang. h : tang. b
r : Cos. B = tang. h : tang. a } (§. 303. II. 3.)

III. Zuſatz: Die Hypothenuſe iſt ſpitzig, oder ſtumpf, je nachdem ein ſchiefer Winkel mit ſeinem anliegenden Perpendikel gleichartig, oder ungleichartig iſt. Denn $\cot. h = \frac{\text{Cos. A. cot. b}}{r}$ (Lehrſ.), folglich cot. h allemal poſitiv, wenn A, b entweder beyde ſpitzig, oder beyde ſtumpf ſind, denn im erſtern Falle iſt ſowohl der Coſinus, als die Cotangens poſitiv, im zweyten beyde negativ, mithin ihr Product immer poſitiv, folglich auch cot. h, alſo h ſpitzig. Sind

hin-

hingegen A, b ungleichartig, so ist von Cos. A, cot. b der eine Factor positiv, der andere negativ, also ihr Product, mithin auch cot. h negativ, folglich h stumpf.

IV. Zusatz: Ein schiefer Winkel ist mit dem anliegenden Perpendikel gleichartig, oder ungleichartig, je nachdem die Hypothenuse spitzig, oder stumpf ist.

V. Zusatz: Da $\cot. b = \frac{r. \cot. h}{\cos. A}$, so ist der Perpendikel b spitzig oder stumpf, je nachdem der anliegende Winkel A mit der Hypothenuse gleich- oder ungleichartig ist.

§. 392.

Lehrsatz:

Der Radius verhält sich zum Cosinus der Hypothenuse, wie Tangens des einen anliegenden Winkels zur Cotangens des andern anliegenden Winkels, das ist (Fig. 218.); $r : \cos. h = \text{tang. } B : \cot. A$.

Beweis:

$r : \sin. BE = \text{tang. } B : \text{tang. } FE$ (§. 387.), also
$r : \cos. h = \text{tang. } B : \cot. A$ (§. 388.).

I. Zusatz: $r : \cos. h = \text{tang. } A : \cot. B$.

II. Zusatz: Da $\cot. A = \frac{\cos. h. \text{tang. } B}{r}$ ist, so ist der schiefe Winkel A spitzig oder stumpf, je nachdem der andere Winkel B mit der Hypothenuse gleichartig oder ungleichartig ist; und umgekehrt:

III.

III. Zusatz: Die Hypothenuse ist mit einem anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig, je nachdem der andere anliegende Winkel entweder spitzig, oder stumpf ist.

IV. Zusatz: Da $\text{Cos. h} = \frac{\text{r. cot. A}}{\text{tang. B}}$, so ist h spitzig oder stumpf, je nachdem die bey dem anliegenden Winkel gleich- oder ungleichartig sind.

§. 393.

Aufgabe:

Im rechtwinklichten Dreyecke AHB (Fig. 215.) sind außer dem rechten Winkel H noch zwey Stücke gegeben, man soll die übrigen drey durch Rechnung finden.

Auflösung:

1. Da von den fünf Stücken a, b, h, A, B allemal zwey gegeben seyn müssen (§. 289.), so giebt es

2. in dieser Hinsicht zehn verschiedene Fälle (§. 144. Arithm.), von welchen aber vier Fälle, in Rücksicht ihrer Auflösung, wenn man nur die Buchstaben verwechselt, mit andern zusammentreffen, folglich

3. bleiben nur noch 6 verschiedene Fälle übrig; es können nemlich gegeben seyn

I. beyde Perpendikeln a, b;

II. die Hypothenuſe nebſt einem Perpendikel h, a oder h, b

III. ein Perpendikel nebſt ſeinem gegenüberſtehenden Winkel, a, A, oder b, B,

IV. ein Perpendikel nebſt einem anliegenden Winkel b, A, oder a, B.

V. Die Hypothenuſe mit einem anliegenden Winkel h, A, oder h, B.

VI. Die beyden Winkel A, B.

4. In jedem dieſer Fälle kann jedes der drey übrigen Stücke geſucht werden, folglich ſind zuſammen 18 Aufgaben möglich.

5. Jede dieſer Aufgaben läßt ſich aus den vorhergehenden Sätzen, von §. 386. angefangen, auflöſen, nur in einigen Fällen bleibt es noch unbeſtimmt, ob das gefundene Stück ſpitzig oder ſtumpf iſt.

6. Zur leichterer Anwendung dient die eigene beygefügte Tabelle.

§. 394.

Beyſpiele zur Uebung und Erläuterung der Tabelle des vorhergehenden §.

I. Beyſpiel:

Aus den gegebenen Perpendikeln $a = 40°$, $b = 25°$ den Winkel A ſuchen, welcher a gegenüberſteht.

Auflö-

Auflösung:

$r : \text{Sin. } b = \text{cot. } a : \text{cot. } A$ (I. Fall Nr. 1.), also

$$\text{cot. } A = \frac{\text{Sin. } b \text{ cot. } a}{r}.$$

Nun ist log. Sin. b = 9,6259483
log. cot. a = 10,0761865

log. cot. A = 9,7021348, folglich der Winkel A = 63° 16′, weil auch der gegenüberstehende Perpendikel spitzig ist.

II. Beyspiel:

Aus der gegebenen Hypothenuse h = 108° 18′ und dem anliegenden Winkel A = 47° 52′ den andern Winkel B suchen.

Auflösung:

$r : \text{Cos. } h = \text{tang. } A : \text{cot. } B$ (V. Fall Nr. 1.); also

$$\text{cot. } B = \frac{\text{Cos. } h \text{ tang. } A}{r}.$$

Nun ist h stumpf, also Cos. h = Cos. 71° 42′ (S. 294. Zus.), mithin

log. Cos. h = 9,4969192
log. tang. A = 10,0435306

log. cot. B = 9,5404498 = cot. 70° 51′.

Da aber der gegebene Winkel mit der Hypothenuse ungleichartig ist, so ist B stumpf, folglich

B = 180° − 70° 51′ = 109° 9′.

III. Beyſpiel:

Aus dem gegebenen Winkel A = 56° 11′ und ſeinem gegenüberſtehenden Perpendikel a = 45° den andern Perpendikel b ſuchen.

Auflöſung:

tang. A : tang. a = r : Sin. b (III. Fall Nr. 2.), alſo

$$\text{Sin. b} = \frac{\text{r. tang. a}}{\text{tang. A}}.$$ Nun iſt

log. r. tang. a = 20,0000000
log. tang. A = 10,1740140

log. Sin. b = 9,8259860 = log. Sin. 42° 3′.

Im gegenwärtigen Beyſpiele bleibt es aber unentſchieden, wenn es nicht anderswoher bekannt iſt, ob die Seite b = 42° 3′, alſo ſpitzig, oder aber b = 137° 57′, alſo ſtumpf ſey.

III. Abſchnitt.

Von der Natur ſchiefwinklichter Kugeldreyecke überhaupt.

§. 395.

Lehrſatz:

Wenn in ſchiefwinklichten Kugeldreyecken die Winkel an der Grundlinie gleichartig ſind, ſo fällt der Perpendikel innerhalb des Dreyeckes, und iſt mit ihnen gleichartig: ſind aber die Winkel an der Grundlinie ungleichartig, ſo fällt der Perpendikel außerhalb des

Dreyeckes, und ist mit jenem Winkel, der ihm am nächsten liegt, ungleichartig.

Beweis (Fig. 219.):

1. Durch den Punct H eines Kreises HqhQH stehe ein anderer HBhbH senkrecht.
2. Durch einen beliebigen Punct B des letztern gehe der Kreis BDbdB, so macht solcher
3. mit dem ersten Kreise HqhQH auf einer Seite zwey spitzige, auf der andern aber zwey stumpfe Winkel (§. 381. V. Zus.).
4. Sind nun BDH = BdH die spitzigen Winkel, so ist auch
5. in den eben so benannten rechtwinklichten Dreyecken der gegenüberstehende Perpendikel BH spitzig (§. 387. II. Zus.), und
6. aus eben diesen Gründen auf der Seite bey den stumpfen Winkeln BDh = Bdh der Perpendikel Bh stumpf.
7. Nimmt man nun auf dem Kreise HqhQH den Punct A so an, daß AH spitzig ist, und legt
8. durch A, B ebenfalls einen Kreis ABabA, so sind
9. in den rechtwinklichten Dreyecken BAH, BaH, da der Perpendikel BH spitzig ist (Nr. 5.), auch diese eben genannte Winkel spitzig (§. 387. III. Zus.), also
10. ihre Nebenwinkel BAh, Bah stumpf; folglich
11. fällt im Dreyecke ABD, dessen beyde Winkel an der Grundlinie spitzig sind (Nr. 4. u. 9.), der Perpendikel

pendikel BH innerhalb des Dreyeckes, und ist ebenfalls spitzig (Nr. 5.), also mit den Winkeln gleichartig.

12. Eben so fällt im Dreyecke aBd, dessen Winkel an der Grundlinie stumpf sind (Nr. 6. u. 10.), der stumpfe Perpendikel Bh (Nr. 6.) innerhalb des Dreyeckes, und ist mit den Winkeln gleichartig.

13. Im Dreyecke aBD ist ein Winkel BaD spitzig (Nr. 9.), und der andere BDa stumpf (Nr. 6.), der spitzige Perpendikel BH sowohl, als der stumpfe Bh liegt außerhalb des Dreyeckes, ersterer ist mit seinem nächsten Winkel BDa, und letzterer mit BaD ungleichartig.

14. Im Dreyecke ABd ist der eine Winkel BAd stumpf (Nr. 10.), der andere BdA spitzig (Nr. 4.), der spitzige sowohl, als der stumpfe Perpendikel liegen wieder außerhalb des Dreyeckes, ersterer liegt dem stumpfen, und letzterer dem spitzigen Perpendikel am nächsten.

I. Zusatz: Im Dreyecke ABD, dessen Winkel an der Grundlinie beyde spitzig sind, ist auch die Seite AB spitzig. Denn AH, BH sind beyde spitzig, also gleichartig, folglich ist im rechtwinklichten Dreyecke BHA die Hypothenuse AB spitzig (§. 389. I. Zus.).

II. Zusatz: Im Dreyecke aBd, dessen Winkel an der Grundlinie stumpf sind, ist die Seite Ba stumpf; denn AB ist spitzig, also Ba = 180° — AB stumpf.

III. Zusatz: In den Dreyecken aBD, ABd, deren Winkel an der Grundlinie ungleichartig sind, ist im er-

sten die Seite aB stumpf (II. Zus.), und im letzten die Seite AB spitzig (I. Zus.).

§. 396.

Lehrsatz:

Im schiefwinklichten Dreyecke ABD (Fig. 219.) von der Beschaffenheit (§. 395. I. Zus.)

I. für $DH < 90°$ nimmt der spitzige Winkel D ab, wenn DH zunimmt, und

II. für $DH = 90°$ wird $D = BH$,

III. für $DH > 90°$ nimmt der spitzige Winkel D wieder mit dem Bogen DH zu, bis endlich

IV. $DH = aH$, also $D = a = A$ wird.

Beweis:

1. r: Sin. DH = cot. BH : cot. BDH (§. 387. I. Zus.), mithin

2. $\text{cot. BDH} = \frac{\text{cot. BH}}{r}$. Sin. DH.

3. Nun ist der spitzige Bogen BH unveränderlich, mithin $\frac{\text{cot. BH}}{r}$ eine beständige positive Größe; hingegen

4. Sin. DH zwar positiv, aber veränderlich, wenn sich DH ändert, also

5. ist der Winkel D für jeden Werth von DH immer spitzig, weil $\frac{\text{cot. BH}}{r}$ Sin. DH, also auch cot. D immer positiv bleibt, und

6.

6. da für DH $<$ 90° mit dem Bogen, dessen Sinus zunimmt (§. 292. VII. Zus.), so wächst auch cot. D, folglich nimmt der spitzige Winkel D ab.

7. Ist nun DH $=$ 90° $=$ Hq, so ist Sin. DH $=$ r, also cot. D $=$ cot. BH, folglich D $=$ BH.

8. Für DH $>$ Hq oder $>$ 90° nimmt dessen Sinus ab, wenn der Bogen wächst, folglich nimmt auch die cot. D ab, mithin der spitzige Winkel D wieder zu.

9. Ist endlich DH $=$ aH, so ist D $=$ a $=$ A.

10. Weiter als nach a kann D nicht rücken (§. 382. I. Zus.).

I. Zusatz: Im Dreyecke aBd (§. 395. II. Zus.), weil d nothwendig mit dem Puncte D fortrückt, nimmt der stumpfe Winkel adB $=$ 180° $-$ ADB mit seinem spitzigen Bogen hd zu, für hd $=$ hQ $=$ 90°, ist adB $=$ Bh $=$ 180° $-$ BH; rückt nun d über Q nach A zu, oder für hd $>$ hQ oder hd $>$ 90° nimmt der stumpfe Winkel adB ab, wenn der Bogen fortwächst, und für hd $=$ hA ist adB $=$ aAB $=$ 180° $-$ BAD.

II. Zusatz: Im Dreyecke aBD (§. 395. III. Zus.) nimmt der stumpfe Winkel aDB $=$ 180° $-$ ADB zu, wenn sein Bogen Da $=$ aH $-$ DH abnimmt, rücket D in q, oder für aD $=$ aq $=$ aH $-$ 90°, ist aDB $=$ Bh $=$ 180° $-$ BH. Für aD $<$ aq nimmt der Winkel aDB mit dem Bogen ab, bis endlich für aD $=$ 0, aDB $=$ AaB $=$ 180° $-$ BAD wird.

III. Zu-

III. Zusatz: Im Dreyecke ABd (§. 395. III. Zus.) nimmt der spitzige Winkel AdB = ADB ab, wenn dA = hA — hd abnimmt, für dA = QA = hA — 90° ist AdB = BH; rückt nun d über Q gegen A, so nimmt der Winkel zu, wenn der Bogen abnimmt, und wenn d auf A fällt, so wird AdB = DAB.

§. 397.

Lehrsatz:

Im Dreyecke ABD (Fig. 219.) unter den Bestimmungen (§. 395. I. Zus.) ist

I. für DH < 90° die Seite BD ebenfalls spitzig, und steht mit DH im geraden Verhältnisse.

II. Für DH = qH = 90°, ist BD ebenfalls = 90°.

III. Für DH > qH oder > 90°, ist BD stumpf, und steht mit DH immer im geraden Verhältnisse.

IV. Für DH = aH, ist die stumpfe Seite BD = aB = 180° — AB.

Beweis:

1. r : Cos. BH = Cos. DH : Cos. BD (§. 389.), also

2. $\text{Cos. BD} = \frac{\text{Cos. BH}}{r}$. Cos. DH.

3. Nun ist BH unveränderlich, und spitzig, mithin $\frac{\text{Cos. BH}}{r}$ eine beständige positive Größe; ist also

4. DH < 90°, so ist Cos. DH positiv, und nimmt ab, wenn DH wächst (§. 296. III. u. IV. Zus.), mithin ist auch

5. Cos. BD positiv, und nimmt ab, wenn DH wächst, folglich ist

6.

6. BD spitzig, und wächst mit dem Bogen.

7. Für DH = qH = 90°, ist Cos. DH = 0, also auch Cos. BD = 0, folglich BD = 90°.

8. Ist aber DH > qH, oder DH > 90°, so wird dessen Cosinus negativ, und wächst mit dem Bogen; folglich ist auch Cos. BD negativ, und wächst ebenfalls mit dem Bogen, das ist,

9. der Bogen BD ist stumpf, und steht wieder mit dem stumpfen Bogen im geraden Verhältnisse.

10. Rückt endlich D bis nach a, oder für DH = aH = 180° — AH wird die stumpfe Seite BD = aB = 180° — AB.

I. Zusatz: Im Dreyecke aBd (§. 395. II. Zus.), wo d nothwendig mit D fortrückt, und Bd immer = 180° — BD ist, nimmt für hd < 90° die stumpfe Seite Bd ab, wenn hd wächst, und für hd = hQ = 90°, ist Bd = 90°; nimmt nun hd wieder zu, so wird Bd spitzig, nimmt immer ab, bis sie für hd = hA der Seite BA gleich wird.

II. Zusatz: Im Dreyecke aBD (§. 295. III. Zus.) wächst die spitzige Seite BD, wenn Da abnimmt, für Da = qa = aH — 90°, ist BD = 90°; für Da < qa wird BD stumpf, und wächst immer noch, wenn Da abnimmt, bis für Da = 0, BD = Ba = 180° — AB wird.

III. Zusatz: Im Dreyecke ABd (§. 295. III. Zus.) nimmt die stumpfe Seite Bd = 180° — BD ab, wenn dA

abnimmt; für $dA = QA = 90° - AH$ ist $Bd = 90°$, und wenn d dem Puncte A noch näher rückt, wird Bd spitzig, bis d auf A fällt, wo wieder $Bd = AB$ ist.

§. 398.

Lehrsatz:

Wenn (Fig. 219.) im Dreyecke ABD (§. 395. I. Zus.) AH, DH spitzig sind, und wenn

I. $DH > AH$, so ist auch $BD > BA$, und

II. wenn $DH = AH$, so ist $BD = BA$, endlich

III. wenn $DH < AH$, so ist auch $BD < BA$.

Beweis:

1. In den rechtwinklichten Dreyecken AHB, DHB ist

$$\left.\begin{array}{l} r : \text{Cos. AH} = \text{Cos. BH} : \text{Cos. AB} \\ r : \text{Cos. DH} = \text{Cos. BH} : \text{Cos. BD} \end{array}\right\} \text{(§. 389.) also}$$

2. $\text{Cos. DH} : \text{Cos. AH} = \text{Cos. BD} : \text{Cos. AB}$.

3. Sind also DH, AH beyde spitzig, und $DH > AH$, so ist $\text{Cos. DH} < \text{Cos. AH}$, mithin auch $\text{Cos. BD} < \text{Cos. AB}$, ferner ist AB sowohl (§. 395. I. Zus.) als BD spitzig (§. 397. I.), folglich $AB < BD$.

4. Ist aber $DH = AH$, also $\text{Cos. DH} = \text{Cos. AH}$, so ist auch $\text{Cos. BD} = \text{Cos. AB}$, folglich $BD = AB$.

5. Wenn endlich $DH < AH$, also $\text{Cos. DH} > \text{Cos. AH}$, so ist auch $\text{Cos. BD} > \text{Cos. AB}$, folglich $BD < AB$.

Zu-

Zusatz: Wenn umgekehrt im Dreyecke ABD die Bögen AH, DH spitzig, und BD > BA ist, so ist auch DH > AH, für BD = BA wird DH = AH, und für BD < BA ist DH < AH.

§. 399.

Lehrsatz:

Wenn im Dreyecke ABD (§. 395. I. Zus.) DH, und AH spitzig, aber DH < AH (Fig. 219.) ist, und man nimmt FH = DH, so ist

I. die Seite BF der Seite BD gleich, und kleiner, als AB;

II. der Winkel BFH ist spitzig, und gleich BDH hingegen ist BFA stumpf.

Beweis:

1. FH = DH (per hyp.), also

2. BF = BD (§. 398. II.).

3. BD < AB (§. 398. III.), also

4. BF < AB.

5. In den rechtwinklichten Dreyecken BHD, BHF ist der gemeinschaftliche Perpendikel BH spitzig, mithin auch die gegenüberstehenden Winkel BDH, BFH (§. 387. III. Zus.).

6. $\left.\begin{array}{l} r : \text{Sin. DH} = \text{cot. BH} : \text{cot. BDH} \\ r : \text{Sin. FH} = \text{cot. BH} : \text{cot. BFH} \end{array}\right\}$ (§. 387. I. Zus.).

7. Da nun die Bögen DH, FH, also auch ihre Sinus gleich sind, also auch cot. BFH = cot. BDH, so sind auch

8.

8. die spitzigen Winkel BFH, BDH (Nr. 5.) gleich, und der Nebenwinkel des erstern, oder BFA ist stumpf.

§. 400.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke eine Seite d nebst dem anliegenden Winkel A (§. 385. c.) spitzig ist, so giebt es

I. im Falle die Seite a, welche A gegenübersteht, kleiner als die anliegende d ist, zwey verschiedene Dreyecke unter eben diesen Bestimmungen, in dem einem dieser Dreyecke wird der Winkel D spitzig, in dem andern stumpf seyn.

II. Wenn aber $a > d$ ist, so ist das Dreyeck vollkommen bestimmt, und D ist spitzig.

Beweis:

1. Im Dreyecke ABD (Fig. 219.) ist die Seite AB nebst dem anliegenden Winkel BAD, so wie der Bogen AH spitzig (§. 395. I. Zus.).

2. Wenn nun $BD < AB$, so ist auch DH spitzig, (§. 397. I.), und $DH < AH$ (§. 398. Zus.).

3. Nimmt man also $FH = DH$, so ist $BF = BD$ (§. 399.), mithin

4. haben die Dreyecke BAF, BAD die spitzige Seite AB samt dem anliegenden spitzigen Winkel BAD gemein, und die gegenüberstehenden Seiten dieses Winkels BF, BD sind gleich, im erstern Dreyecke ist aber

der

der Winkel BDA spitzig (§. 396. I.), im zweyten hingegen BFA stumpf (§. 399.), das ist,

5. unter den Bestimmungen Nr. I. giebt es zwey verschiedene Dreyecke, in dem einem derselben ist der Winkel D, welcher der grössern Seite d gegenüber steht, spitzig, in dem andern stumpf.

6. Wenn aber BD $>$ AB, so ist auch DH $>$ AH (§. 398. Zus.), also jeder Bogen BF zwischen A und H kleiner, als BD (§. 398.),

7. und eben so auf der andern Seite jeder Bogen zwischen D und H kleiner, und zwischen D und a grösser (§. 397.), folglich

8. giebt es unter den Bestimmungen Nr. II. nur das Dreyeck ABD, wo D spitzig ist (§. 395. I. Zus.).

§. 401.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke eine Seite d nebst dem anliegenden Winkel A stumpf ist,

I. so giebt es für a $>$ d zwey verschiedene Dreyecke, in einem derselben ist D stumpf, im andern spitzig.

II. Für a $<$ d ist aber nur ein Dreyeck möglich mit dem stumpfen Winkel D.

Beweis:

1. Im Dreyecke aBd (Fig. 219.) ist die Seite Ba nebst dem anliegenden Winkel Bad stumpf (§. 395. II. Zus.).

2.

2. Ist nun Bd > Ba, das ist, 180° — BD > 180° — BA, so ist

3. im Dreyecke ABD die Seite BD < BA, und BF = BD, BFD = ADB, und diese Seiten sowohl, als diese Winkel spitzig (§. 400.), also

4. afB spitzig, und der stumpfe Nebenwinkel Bfd = Bda; die stumpfe Seite Bf = Bd, mithin

5. haben die Dreyecke aBf, aBd, die stumpfe Seite aB, nebst dem stumpfen anliegenden Winkel Bad gemein, und die stumpfen Seiten Bf = Bd. Folglich

6. giebt es unter den Nr. I. angeführten Bedingungen zwey verschiedene Dreyecke, in dem einem ist der Winkel, welcher aB gegenüber steht, spitzig, in dem andern aber stumpf.

7. Wenn aber Bd < Ba, so ist im Dreyecke ABD BD > AB, folglich, so wie nun nur ein Dreyeck ABD möglich ist (§. 400.), so ist auch

8. unter den Bestimmungen Nr. II. nur das Dreyeck aBd möglich, wo der Winkel adB = 180° — ADB stumpf ist.

§. 402.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke die Seite d stumpf, der anliegende Winkel A spitzig ist,

I. so giebt es für die spitzige Seite a < 180° — d zwey Dreyecke, in deren einem der Winkel D stumpf, in dem andern spitzig ist. II.

II. Ist aber die spitzige Seite $a > 180° - B$, so ist nur ein Dreyeck möglich mit dem stumpfen Winkel D.

Beweis:

1. Im Dreyecke aBD (Fig. 219.) ist die Seite aB stumpf, und der anliegende Winkel $BaD = BAD$ spitzig (§. 395. III. Zus.).

2. Ist nun die spitzige Seite $BD < 180° - aB$ also $BD < AB$, so ist $BF = BD$, und BFD spitzig (§. 400.), mithin

3. Kömmt die stumpfe Seite aB, der anliegende Winkel BaD den beyden Dreyecken BaD, BaF zu, und die spitzige Seiten $BD = BF$, folglich

4. giebt es unter den Bedingungen Nr. I. zwey verschiedene Dreyecke, in einem derselben ist der Winkel aDB, welcher der stumpfen Seite aB gegenübersteht, stumpf, im andern aber aFB spitzig.

5. Ist aber die spitzige Seite $BD > 180° - aB$, oder $BD > AB$, so giebt es nur ein Dreyeck ABD, dessen Winkel ADB spitzig ist (§. 400.), folglich ist auch

6. unter den Bestimmungen Nr. II. nur das Dreyeck aBD möglich mit dem stumpfen Winkel aDB.

§. 403.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke die Seite d spitzig, der anliegende Winkel A stumpf ist,

I.

I. so giebt es für die stumpfe Seite $a > 180° - d$ zwey verschiedene Dreyecke, in einem derselben ist D spitzig, im andern stumpf.

II. Wenn aber die stumpfe Seite $a < 180° - d$ ist, so giebt es nur ein Dreyeck mit dem spitzigen Winkel D.

Beweis:

1. Im Dreyecke ABd (Fig. 219.) ist die Seite AB spitzig, und der anliegende Winkel BAd stumpf (§. 395. III. Zus.).
2. Ist nun die stumpfe Seite $Bd > 180° - AB$, also $Bd > Ba$, so ist $Bf = Bd$, und AfB stumpf (§. 401.), mithin
3. haben die beyden Dreyecke ABd, ABf die spitzige Seite AB, und den anliegenden stumpfen Winkel BAd gemein, und die stumpfen Seiten $Bd = Bf$, im erstern Dreyecke aber ist der Winkel $AdB = ADB$ spitzig, im andern hingegen $AfB = AFB$ stumpf; folglich
4. giebt es unter den Nr. I. festgesetzten Bedingungen zwey verschiedene Dreyecke, in einem derselben ist der Winkel, welcher der spitzigen Seite gegenüberstehet, spitzig, im andern stumpf.
5. Wenn aber $Bd < 180° - AB$, also $Bd < Ba$ ist, so giebt es nur ein Dreyeck aBd, in welchem adB stumpf, also AdB spitzig ist (§. 401.).
6. Folglich ist auch unter den Bestimmungen Nr. II. nur das Dreyeck ABd mit dem spitzigen Winkel $AdB = ADB$ möglich.

§. 404.

§. 404.

Lehrsatz:

Wenn (Fig. 220.) im Dreyecke ABD (§. 395. I. Zuſ.)

I. DH = AH, ſo iſt BDA = BAD
II. DH > AH, . . . BDA < BAD
III. DH < AH, . . . BDA > BAD.

Beweis:

1. In den rechtwinklichten Dreyecken BHD, BHA iſt

$$\left.\begin{array}{l} r : \text{Sin. DH} = \text{cot. BH} : \text{cot. BDH} \\ r : \text{Sin. AH} = \text{cot. BH} : \text{cot. BAH} \end{array}\right\} \text{(§. 387. I. Zuſ.).}$$

2. Da BH ſpitzig, ſo ſind BDH, BAH ebenfalls ſpitzig (§. 387. III. Zuſ.).

3. Nun iſt für DH = AH, auch Sin. DH = Sin. AH mithin auch cot. BDH = cot. BAH, alſo BDH = BAH, oder BDA = BAD.

4. Für DH > AH, Sin. DH > Sin. AH, weil beyde Bögen ſpitzig ſind, alſo auch cot. BDH > cot. BAH, mithin der ſpitzige Winkel BDH < als der ebenfalls ſpitzige Winkel BAH, oder BDA < BAD.

5. Iſt hingegen DH < AH, ſo iſt Sin. DH < Sin. AH, mithin cot. BDH < cot. BAH, folglich BDH > BAH, oder BDA > BAD.

Zuſatz: Umgekehrt im Dreyecke ABD iſt der Bogen DH gleich, gröſſer, oder kleiner als AH, je nachdem der Winkel BDA gleich, kleiner, oder gröſſer als BAD iſt.

§. 405.

Lehrsatz:

Wenn man (Fig. 220.) im Dreyecke ABD (§. 395. I. Zuſ.) Hf = 180° — DH nimmt, ſo iſt

I. BfA = BDA

III. Bf = 180° — BD.

Beweis:

1. r : Sin. DH = cot. BH : cot. BDH
   r : Sin. fH = cot. BH : cot. BfH } (§. 387. I. Zuſ.).
2. Nun iſt Sin. DH = Sin. fH (§. 292. I. Zuſ.). mithin
3. cot. BfH = cot. BDH.
4. Da ferner der gemeinſchaftliche Perpendikel BH, alſo auch die opponirten Winkel ſpitzig ſind (§. 387. III. Zuſ.), ſo iſt
5. BfH = BDH, oder BfA = BDA (N. I.).
6. r : Cos. DH = Cos. BH : Cos. BD
   r : Cos. fH = Cos. BH : Cos. Bf } (§. 389.), alſo
7. Cos. DH : Cos. fH = Cos. BD : Cos. Bf.
8. Nun iſt Cos. fH = — Cos. DH (§. 296. III. u. IV. Zuſ.), alſo auch Cos. Bf = — Cos. BD, folglich iſt
9. der ſtumpfe Bogen Bf = 180° — BD (Nr. II.), oder Bf + BD = 180°.

I. Zu-

I. Zusatz: Da f nie weiter, als bis a rücken, oder für das Dreyeck ABD der Bogen Hf nie größer als Ha werden kann (§. 382. I. Zus.), so kann, so lange es ein solches Hf giebt, DH nie kleiner als AH werden. Denn Hf = 180° — DH ist als ein größtes = Ha = 180° — AH, folglich das kleinste DH = AH: jeden Bogen HD, welcher entweder gleich, oder größer als AH, aber doch kleiner als Aq = 90° ist, entspricht ein stumpfer Bogen Hf = 180° — DH, welcher die im Lehrsatze angeführte Folgen hat.

II. Zusatz: Wenn im Dreyecke ABD der Winkel BDA entweder gleich, oder kleiner als BAD ist, so giebt es einen stumpfen Bogen Bf so, daß BfA = BDA, und Bf + BD = 180° ist. Denn im ersten Falle ist DH = AH, im zweyten aber DH > AH (§. 404. Zus.), in beyden Fällen aber kann man Hf = 180° — DH nehmen, wo dann die angeführten Bedingungen Statt haben (I. Zus.).

III. Zusatz: Wenn im Dreyecke ABD der Winkel BDA > BAD ist, so giebt es für dieses Dreyeck keinen solchen stumpfen Bogen Bf. Denn in diesem Falle ist DH < AH (§. 404. Zus.), mithin giebt es kein Hf, folglich auch kein Bf (I. Zus.).

§. 406.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke eine Seite d nebst dem anliegenden Winkel A spitzig ist,

I. so giebt es für $D < A$ zwey verschiedene Dreyecke, in einem derselben ist a spitzig, im andern stumpf.

II. Wenn aber $D > A$ ist, so giebt es nur ein Dreyeck mit der spitzigen Seite a.

Beweis:

1. Im Dreyecke ABD (Fig. 220.) ist AB sowohl, als BAD spitzig (§. 395. I. Zus.).

2. Ist nun $BDA < BAD$, so giebt es einen stumpfen Bogen Bf so, daß $Bf + BD = 180°$, und $BfA = BDA$ ist (§. 405. II. Zus.).

3. Beyde Dreyecke BAD, BAf haben also die Seite BA, den anliegenden Winkel BAD gemein, und $BfA = BDA$, das ist,

4. Unter den Bestimmungen Nr. I. giebt es zwey verschiedene Dreyecke, in dem einen ist a spitzig, und in dem andern stumpf.

5. Ist hingegen $BDH > BAD$, so giebt es keinen solchen stumpfen Bogen Bf (§. 405. III. Zus.), mithin ist

6. unter den Bestimmungen Nr. II. nur ein Dreyeck mit der spitzigen Seite a möglich.

§. 407.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke eine Seite d nebst dem anliegenden Winkel A stumpf, und

I.

I. der Winkel D > A ist, so giebt es unter eben diesen Bedingungen zwey verschiedene Dreyecke, in einem derselben ist a spitzig, im andern aber stumpf.

II. Ist aber D < A, so giebt es nur ein Dreyeck, in welchem a stumpf ist.

Beweis:

1. Im Dreyecke aBd (Fig. 220.) ist die Seite aB, nebst dem anliegenden Winkel Bad stumpf (S. 395. II. Zus.).

2. Wenn nun adB > Bad, so ist im Dreyecke ABD, der Winkel ADB < BAD, mithin giebt es für dieses Dreyeck einen stumpfen Bogen Bf so, daß Bf + BD = 180°, und AfB = ADB (S. 406. I.).

3. Nun ist BF = 180° — Bf
Bd = 180° — BD, also

BF + Bd = 360 — (Bf + BD) = 180°.

4. aFB = 180° — AfB = 180° — ADB = adB; das ist,

5. für das Dreyeck aBd giebt es einen spitzigen Bogen BF von der Beschaffenheit wie jene des stumpfen Bogens Bf für das Dreyeck ABD, mithin

6. haben beyde Dreyecke aBd, aBF die stumpfe Seite aB, nebst dem anliegenden stumpfen Winkel Bad gemein, und der andere Winkel adB, welcher der

Seite aB entgegensteht, ist eben so groß als aFB; hingegen ist im erstern Dreyecke Bd stumpf, im andern BF = 180° — Bd spitzig, das ist:

7. unter den Bedingungen Nr. I. kann die Seite a sowohl spitzig, als stumpf seyn.

8. Ist aber adB < Bad, so ist im Dreyecke ABD der Winkel ADB > BAD, mithin giebt es für dieses Dreyeck kein stumpfes Bf (§. 406. II.), folglich giebt es für das Dreyeck aBd kein spitziges BF, das ist:

9. unter den Bedingungen Nr. II. giebt es nur ein Dreyeck mit der stumpfen Seite a.

§. 408.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke d stumpf, der anliegende Winkel A spitzig ist,

I. so giebt es für D > 180° — A zwey verschiedene Dreyecke, in einem derselben ist a spitzig, im andern stumpf.

II. Für D < 180° — A hingegen ist nur ein Dreyeck mit der spitzigen Seite a möglich.

Beweis:

1. Im Dreyecke aBD (Fig. 220.) ist die Seite aB stumpf, und der anliegende Winkel BaD spitzig (§. 395. III. Zus.).

2.

2. Ist nun aDB > 180° — BaD, oder
180° — ADB > 180° — BAD, so ist

3. Im Dreyecke ABD der Winkel ADB < BAD, es giebt also zwischen a und q ein stumpfes Bf, und Bf + BD = 180°, ferner BfD = BDA (§. 405. II. Zus.), mithin auch die Nebenwinkel afB = aDB.

4. Die beyden Dreyecke aBD, aBf haben also die stumpfe Seite aB, den anliegenden spitzigen Winkel BaD gemeinschaftlich, und der stumpfe Winkel aDB = afB; in dem ersten Dreyecke aber ist die dem spitzigen Winkel gegenüberstehende Seite BD spitzig, im andern hingegen Bf stumpf; das ist,

5. unter den Bestimmungen Nr. I. kann die Seite a spitzig, und stumpf seyn.

6. Wenn aber aDB < 180° — BaD, oder
180° — ADB < 180° — BAD, also

7. im Dreyecke ABD der Winkel ADB > BAD ist, so giebt es kein solches stumpfes Bf (§. 405. III. Zus.), als ist nur das Dreyeck aBD möglich, folglich

8. unter den Bestimmungen Nr. II. ist die Seite a, welche A gegenübersteht, allemal spitzig.

§. 409.

Lehrsatz:

Wenn in einem Dreyecke die Seite d spitzig, der anliegende Winkel A stumpf ist,

I. so giebt es für D < 180° — A zwey verschiedene Dreyecke, in deren einem die Seite a spitzig, in dem andern stumpf ist.

II.

II. Für $D > 180° - A$ ist das Dreyeck vollkommen bestimmt, und a stumpf.

Beweis:

1. Im Dreyecke ABd (Fig. 220.) ist die Seite AB spitzig, der anliegende Winkel BAd stumpf (§. 395. III. Zus.).

2. Ist nun $AdB < 180° - BAd$, oder
$ADB < 180° - BAd$, so ist

3. im Dreyecke ABD der Winkel $ADB < BAD$, mithin giebt es für das Dreyeck aBd ein spitziges BF, und $BF + Bd = 180°$; $adB \cong aFB$ (§. 407.), also auch die Nebenwinkel $AdB = AFB$, folglich

4. haben die beyden Dreyecke ABd, ABF die spitzige Seite AB, nebst dem anliegenden stumpfen Winkel BAd gemein, und $AFB = AdB$; hingegen ist im ersten Dreyecke Bd stumpf, im andern BF spitzig, das ist,

5. unter den Bestimmungen Nr. I. kann die Seite a, welche dem stumpfen Winkel A gegenübersteht, sowohl stumpf, als spitzig seyn.

6. Ist hingegen $AdB > 180° - BAd$, oder
$ADB > 180° - BAd$, so ist

7. im Dreyecke ABD der Winkel $ADB > BAD$, mithin giebt es für das Dreyeck aBd kein spitziges BF (§. 407.), mithin ist nur das Dreyeck BAd möglich, wo Bd stumpf ist, folglich

8. unter den Bestimmungen Nr. II. ist die Seite a nothwendig stumpf.

IV.

IV. Abſchnitt.

Von der Auflöſung ſchiefwinklichter Dreyecke.

§. 410.

Lehrſatz:

Im ſchiefwinklichten Dreyecke ABD (Fig. 216. u. 217.) verhalten ſich die Sinus zweyer Seiten, wie die Sinus ihrer opponirten Winkel, das iſt:

$$\text{Sin. a} : \text{Sin. d} = \text{Sin. A} : \text{Sin. D.}$$

Beweis:

1. Man nehme die Seite AD = b als Grundlinie, und errichte den Perpendikel BH, ſo liegt ſolcher entweder zwiſchen (Fig. 217.), oder außer den beyden andern Seiten (Fig. 216.).

2. Im jeden Falle nun ſind die beyden Dreyecke ABH, DBH rechtwinklicht, mithin allemal

3. $\left.\begin{array}{l} r : \text{Sin. AB} = \text{Sin. A} : \text{Sin. BH} \\ r : \text{Sin. BD} = \text{Sin. D} : \text{Sin. BH} \end{array}\right\}$ (§. 386.), mithin

4. Sin. BD : Sin. AB = Sin. A : Sin. D (§. 218. III. Arithm.), oder Sin. a : Sin. d = Sin. A : Sin. D.

Anmerkung: Im rechtwinklichten Dreyecke BDH nimmt man die trigonometriſchen Linien vom innern Winkel dieſes Dreyeckes, oder vom Nebenwinkel BDH = 180° — ADB, weil ein ſtumpfer Winkel mit ſeinem ſpitzigen Supplement gleichen Sinus, Coſinus, Tangens

gens hat (§. 304. IV. Zuſ.), aber vom Coſinus und der Tangens ſind ihre Zeichen verſchieden, auf welches man Rückſicht nehmen muß, wenn man aus ihren Zeichen ſchließen will.

I. Zuſatz: In der Figur 216., wo die Winkel an der Grundlinie A, D ungleichartig ſind, bezeichnet A den ſpitzigen, und D den ſtumpfen Winkel, mithin BH den ſpitzigen Perpendikel (§. 395.).

II. Zuſatz: Wenn die Winkel A, D an der Grundlinie gleichartig ſind (Fig. 217.), ſo iſt

$$AD = b = AH + DH,$$
$$ABD = B = ABH + DBH.$$

AH, ABH ſind ſpitzig oder ſtumpf, je nachdem A, d gleich- oder ungleichartig ſind (§. 391. V. Zuſ. §. 392. II. Zuſ.); und eben ſo ſind

DH, DBH ſpitzig oder ſtumpf, je nachdem a, D gleich- oder ungleichartig ſind.

III. Zuſatz: Wenn die Winkel A, D an der Grundlinie ungleichartig ſind (Fig. 216.), und zwar A ſpitzig, und D ſtumpf iſt (I. Zuſ.), ſo iſt

$$AD = b = AH - DH$$
$$ABD = B = ABH - DBH.$$

AH, und ABH ſind ſpitzig oder ſtumpf, je nachdem A, d gleich- oder ungleichartig ſind (§. 391. V. Zuſ. §. 392. II. Zuſ.), hingegen aus eben den Gründen ſind

DH, DBH ſpitzig oder ſtumpf, je nachdem a, und der Nebenwinkel von D gleich- oder ungleichartig,

was einerley ist, je nachdem a, D ungleichartig, oder gleichartig sind.

IV. Zusatz: Wenn b = AH + DH, mithin auch B = ABH + DBH (Fig. 217.), so sind die Winkel A, D an der Grundlinie gleichartig, folglich AH, ABH spitzig oder stumpf, je nachdem A, d gleich- oder ungleichartig sind; DH, DBH sind spitzig oder stumpf, je nachdem a, D gleich- oder ungleichartig sind (II. Zus.).

V. Zusatz: Wenn b = AH — DH, folglich auch B = ABH — DBH, so sind die Winkel an der Grundlinie ungleichartig, und A bezeichnet den spitzigen, D den stumpfen Winkel; folglich sind DH, DBH spitzig oder stumpf, je nachdem a, D ungleichartig, oder gleichartig sind; hingegen AH, ABH sind spitzig oder stumpf, je nachdem A, d gleichartig, oder ungleichartig sind (III. Zus.).

§. 411.

Lehrsatz:

In schiefwinklichten Dreyecken ABD (Fig. 216, 217.) verhalten sich die Tangenten der beyden Winkel, welche an der Grundlinie liegen, umgekehrt wie die Sinus ihrer Entfernungen vom Perpendikel, das ist:

tang. A : tang. D = Sin. DH : Sin. AH.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} r : \text{Sin. AH} = \text{tang. A} : \text{tang. BH} \\ r : \text{Sin. DH} = \text{tang. D} : \text{tang. BH} \end{array}\right\} \text{(§. 387.), also}$$

Sin. DH : Sin. AH = tang. A : tang. D. §. 412.

§. 412.

Lehrsatz:

In schiefwinklichten Dreyecken (Fig. 216, 217.) verhalten sich die Cosinuse zweyer Seiten wie die Cosinuse der Entfernungen ihrer Winkel, welche sie mit der Grundlinie einschließen, vom Perpendikel, das ist:

Cos. d : Cos. a = Cos. AH : Cos. DH.

Beweis:

1 : Cos. BH = Cos. AH : Cos. AB
r : Cos. BH = Cos. DH : Cos. BD } (§. 389.), also

Cos. AH : Cos. AB = Cos. DH : Cos. BD, das ist,
Cos. AH : Cos. d = Cos. DH : Cos. a, mithin
Cos. AH : Cos. DH = Cos. d : Cos. a.

§. 413.

Lehrsatz:

In schiefwinklichten Dreyecken (Fig. 216, 217.) verhalten sich die Cosinuse der beyden Winkel an der Grundlinie, wie die Sinus der Winkel, welche ihre anliegenden Seiten mit dem Perpendikel einschließen, das ist:

Cos. A : Cos. D = Sin. ABH : Sin. DBH.

Beweis:

r : Cos. BH = Sin. ABH : Cos. A
r : Cos. BH = Sin. DBH : Cos. D } (§. 390.), also

Sin. ABH : Cos. A = Sin. DBH : Cos. D, und
Cos. A : Sin. ABH = Cos. D : Sin. DBH, folglich
Cos. A : Cos. D = Sin. ABH : Sin. DBH.

§. 414.

§. 414.

Lehrsatz:

In schiefwinklichten Dreyecken (Fig. 216, 217.) verhalten sich die Tangenten zweyer Seiten umgekehrt wie die Cosinuse ihrer Winkel, welche sie mit dem Perpendikel einschließen, das ist:

tang. a : tang. d = Cos. ABH : Cos. DBH.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} r : \text{Cos. ABH} = \text{tang. AB} : \text{tang. BH} \\ r : \text{Cos. DBH} = \text{tang. BD} : \text{tang. BH} \end{array}\right\} \text{(§. 391. II. Zus.)},$$

also Cos. ABH : Cos. DBH = tang. BD : tang. AB
= tang. a : tang. d.

§. 415.

Lehrsatz:

Im schiefwinklichten Kugeldreyecke ABD (Fig. 214.) ist für den Halbmesser 1

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b. Cos. d}}{\text{Sin. b. Sin. d}}.$$

Beweis:

1. Wenn man die Figur wie §. 382. II. u. III. Zus. construirt, so ist
2. Dmo = A; Dno = B;
3. ACB = d; ACD = b; BCD = a.
4. Dm = Sin. b, Cm = Cos. b
5. Dn = Sin. a, Cn = Cos. a, ferner ist:
6. Dom = Don = Cmo = Cno = CmD = CnD = 90°.

7.

7. $Dm : Do = 1 : Sin.Dmo$ (§. 323. I.), oder
$Sin\ b : Do = 1 : Sin.A$, mithin

8. $Do = Sin.b.\ Sin.A.$

9. $Dm : mo = 1 : Cos.Dmo$ (§. 323. II.), oder
$Sin.b : mo = 1 : Cos.A$, mithin

10. $mo = Sin.b.\ Cos.A.$

11. Im Dreyecke mCn ist
$mn^2 = Cm^2 + Cn^2 - 2Cm.Cn.Cos.mCn$ (§. 338. II.)
$= Cos.b^2 + Cos.a^2 - 2Cos.b\ Cos.a\ Cos.d.$

12. In eben diesem Dreyecke ist auch
$mn : Cn = Sin.mCn : Sin.Cmn$ (§. 330.),
und weil $Cmn = Cmo - nmo = 90° - nmo$
(Nr. 6.), so ist
$Sin.Cmn = Cos.nmo$, mithin

13. $mn : Cos.a = Sin.d : Cos.nmo$, also

14. $Cos.nmo = \frac{Cos.a.\ Sin.d}{mn}$

15. Im Dreyecke mon ist
$no^2 = mn^2 + mo^2 - 2mn.mo.Cos.nmo$ (§. 338. II.)
$= mn^2 + mo^2 - 2mo.Cos.a.Sin.d$ (Nr. 14.).

16. Im rechtwinklichten Dreyecke Don ist
$no^2 = Dn^2 - Do^2$, mithin

17. $Dn^2 - Do^2 = mn^2 + mo^2 - 2mo.Cos.a Sin.d$ (Nr. 15),
also $2mo.Cos.a\ Sin.d = mo^2 + Do^2 + mn^2 - Dn^2$.

18. Im rechtwinklichten Dreyecke Dom ist
$Dm^2 = mo^2 + Do^2$, mithin

19.

19. $mo^2 + Do^2 = Sin.\,b^2$ (Nr. 4.)

$Dn^2 = Cos.\,b^2 + Cos.\,a^2 - 2\,Cos.\,b\,Cos.\,a\,Cos.\,d$ (Nr. 11.)

$Dn^2 = Sin.\,a^2 = 1 - Cos.\,a^2$, folglich

20. $mo^2 + Do^2 + mn^2 - Dn^2 = Sin.\,b^2 + Cos.\,b^2 - 1 + 2\,Cos.\,a^2 - 2\,Cos.\,a.\,Cos.\,b.\,Cos.\,d = 2\,Cos.\,a\,(Cos.\,a - Cos.\,b\,Cos.\,d)$.

21. $2mo.\,Cos.\,a\,Sin.\,d = 2\,Sin.\,b\,Cos.\,a\,Sin.\,d\,Cos.\,A$ (Nr. 10.), folglich wenn man diese Werthe in der Gleichung Nr. 17. setzet.

22. $2\,Sin.\,b\,Cos.\,a\,Sin.\,d\,Cos.\,A = 2\,Cos.\,a\,(Cos.\,a - Cos.\,b\,Cos.\,d)$;

$Sin.\,b\,Sin.\,d\,Cos.\,A = Cos.\,a - Cos.\,b.\,Cos.\,d$, folglich

23. $Cos.\,A = \frac{Cos.\,a - Cos.\,b\,Cos.\,d}{Sin.\,b.\,Sin.\,d}$.

I. Zusatz: $1 - Cos.\,A = 1 - \frac{Cos.\,a - Cos.\,b.\,Cos.\,d}{Sin.\,b.\,Sin.\,d} = \frac{Sin.\,b.\,Sin.\,d - Cos.\,a + Cos.\,b.\,Cos.\,d}{Sin.\,b.\,Sin.\,d} = \frac{Cos.\,(b-d) - Cos.\,a}{Sin.\,b.\,Sin.\,d}$

(§. 309. I. Zus.).

II. Zusatz: Man setze $b - d = \alpha - \beta$

$a = \alpha + \beta$, also

$a + b - d = 2\alpha$, und

$a + d - b = 2\beta$, mithin

$\alpha = \frac{1}{2}(a + b - d)$; $\beta = \frac{1}{2}(a + d - b)$; ferner ist

$Cos.\,(\alpha - \beta) - Cos.\,(\alpha + \beta) = 2\,Sin.\,\alpha\,Sin.\,\beta$

(§. 309.

(§. 309. III. Zuſ.), das iſt, $\text{Cos.}(b-d) - \text{Cos.}\,a = 2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-d)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+d-b)$. Folglich, wenn man dieſen Ausdruck ſtatt des Zählers im I. Zuſatze ſetzet, ſo wird

$$1-\text{Cos.}\,A = \frac{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-d)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+d-b)}{\text{Sin.}\,b.\,\text{Sin.}\,d}.$$

III. Zuſatz: $\text{Sin.}\frac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{1-\text{Cos.}\,A}{2}\right)}$ (§. 308. IV. Zuſ.), alſo

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{1-\text{Cos.}\,A}{2} = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c-d)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+d-b)}{\text{Sin.}\,b.\,\text{Sin.}\,d}$$

§. 416.

Lehrſatz:

Für den Halbmeſſer r iſt

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-d)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+d-b)}{\text{Sin.}\,b.\,\text{Sin.}\,d}\,r^2.$$

Beweis:

1. Wenn man für den Halbmeſſer 1 die Sinus durch *Sin.* zum Unterſchiede bezeichnet, ſo iſt

2. $$\textit{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\textit{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-d)\,\textit{Sin.}\frac{1}{2}(a+d-b)}{\textit{Sin.}\,b.\,\textit{Sin.}\,d}$$

(§. 415. III. Zuſ.).

3. Nun iſt $\textit{Sin.}\frac{1}{2}A^2 = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}A^2}{r^2}$ (§. 305. II. Zuſ.), eben ſo iſt

4. $$\frac{\textit{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-d)}{\textit{Sin.}\,b} = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-d)}{r} : \frac{\text{Sin.}\,b}{r} = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-d)}{\text{Sin.}\,b}.$$

5.

5. $\frac{Sin.\frac{1}{2}(a+d-b)}{Sin.\,d} = \frac{Sin.\frac{1}{2}(a+d-b)}{r} : \frac{Sin.\,d}{r}$

$= \frac{Sin.\frac{1}{2}(a+b-d)}{Sin.\,d}$.

6. Substituirt man die Werthe Nr. 3—5. in der Gleichung Nr. 2., so ist

$\frac{Sin.\frac{1}{2}A^2}{r^2} = \frac{Sin.\frac{1}{2}(a+b-d)\,Sin.\frac{1}{2}(a+d-b)}{Sin.\,b.\,Sin.\,d}$,

folglich

7. $Sin.\frac{1}{2}A^2 = \frac{Sin.\frac{1}{2}(a+b-d)\,Sin.\frac{1}{2}(a+d-b}{Sin.\,b.\,Sin.\,d}r^2$.

§. 417.

Aufgabe:

Zu einem gegebenen Dreyecke ABC (Fig. 221.) ein anderes DEF verzeichnen, dessen Seiten die gegenüberstehenden Winkel, und dessen Winkel die gegenüberstehenden Seiten vom ersten Dreyecke zu 180° ergänzen.

Auflösung:

1. Man nehme auf den Schenkeln des Winkels A die Bögen AG = AH = 90°, und lege durch G, H einen größten Kreis.

2. Eben so nehme man auf den Schenkeln des Winkels B die Bögen BM = BN = 90°, und lege durch M, N einen größten Kreis.

3. Endlich nehme man auch auf den Schenkeln des Winkels C die Bögen CI = CL = 90°, und

lege

lege durch I, L einen Kreis; diese drey gröſsten Kreise werden

4. das verlangte Dreyeck DEF geben.

Beweis:

5. Da AG = AH = 90° (Nr. 1.), so ist A = GH (§. 381. II. Zus.), und der Kreis durch G, H, steht auf den beyden Kreisen durch A, B, und A, C, senkrecht (§. 379. VII. Zus.).

6. Eben so ist BM = BN = 90° (Nr. 2.), also B = MN, und der Kreis durch M, N, steht auf den beyden durch A, B, und B, C, senkrecht.

7. Endlich ist CI = CL = 90° (Nr. 3.), also C = IL, und der Kreis durch I, L, steht auf jenen durch A, C, und B, C, senkrecht.

8. Die Kreise durch G, H, und M, N, stehen auf dem Kreise durch A, B, senkrecht (Nr. 5. und 6.), also ist F der Pol des letztern Kreises, und FG = FM = 90° (§. 379. III. u. V. Zus.), und F = GM (§. 381. III. Zus.).

9. Eben so stehen die Kreise durch M, N, und I, L, auf dem Kreise durch B, C, senkrecht (Nr. 6. u. 7.), also ist D der Pol des letztern; DN = DL = 90°, und D = LN.

10. Endlich stehen auch die Kreise durch G, H, und I, L, auf dem Kreise durch A, C, senkrecht (Nr. 5. u. 7.), also ist E der Pol des letztern Kreises; EH = EI = 90°, und E = IH.

11. Nun iſt EH + GF = 180° (Nr. 8. u. 10), oder EH + (GH + HF) = EF + GH = 180°, das iſt, EF + A = 180° (Nr. 5.), die Seite EF ergänzt alſo den gegenüberſtehenden Winkel A des gegebenen Dreyeckes zu 180°.

12. Eben ſo iſt FM + DN = 180° (Nr. 8. u. 9.), oder FM + NM + MD = FD + NM = FD + B (Nr. 6.) = 180°.

13. EI + DL = 180° (N. 9. u. 10.), oder FI + IL + ID = DE + IL = DE + C (Nr. 7.) = 180°.

14. Ferner iſt AG + BM = 180° (Nr. 1. u. 2.), oder AG + AB + AM = GM + AB = F + AB (Nr. 8.) = 180°, folglich ergänzet der Winkel F die gegenüberſtehende Seite AB des gegebenen Dreyeckes.

15. AH + CI = 180° (Nr. 1. u. 3.), oder AH + AC + IA = HI + AC = E + AC (Nr. 10.).

16. Endlich BN + CL = 180° (Nr. 2. u. 3.), oder BN + BC + BL = LN + BC = D + BC (Nr. 9.) = 180°, folglich ergänzen

17. die Seiten des Dreyeckes DEF die gegenüberſtehenden Winkel (Nr. 11—13.), und die Winkel die Seiten des Dreyeckes ABC (Nr. 14—16.).

Anmerkung: Wenn im Dreyecke ABC eine, oder mehrere Seiten ſtumpf ſind, ſo muß man ſie zu Quadranten abkürzen. Man vergleiche §. 388. Zuſ.

$A+d = B+e = C+f = 180°$, und eben so
$a+D = b+E = c+F = 180°$.

§. 418.

Lehrsatz:

Im schiefwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 221.) ist:

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin. B. Sin. C}}\, r^2,$$

Beweis:

1. Man verzeichne das Dreyeck DEF_1, dessen Seiten die Winkel, und dessen Winkel die Seiten von ABC zu 180° ergänzen (§. 417.), so ist

2. $d = 180° - A$
   $e = 180° - B$
   $f = 180° - C$

   $d+e-f = 180°-A-B+C = 180°-(A+B-C)$,
   also $\tfrac{1}{2}(d+e-f) = 90° - \tfrac{1}{2}(A+B-C)$, und

3. $\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(d+e-f) = \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)$.

4. $d = 180° - A$
   $f = 180° - C$
   $e = 180° - B$

   $d+f-e = 180°-A-C+B = 180°-(A+C-B)$
   $\tfrac{1}{2}(d+f-e) = 90°-(A+C-B)$, folglich

5. $\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(d+f-e) = \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C-B)$.

6. $\text{Sin.}\, e = \text{Sin. B}$, $\text{Sin.}\, f = \text{Sin. C}$, mithin
   $\text{Sin. e. Sin.}\, f = \text{Sin. B. Sin. C.}$

7. $D = 180°-a$; $\tfrac{1}{2}D = 90°-a$, also
   $\text{Sin.}\tfrac{1}{2}D = \text{Cos.}\tfrac{1}{2}a$, folglich

8.

8. $\text{Sin.}\frac{1}{2}D^2 = \text{Cos.}\frac{1}{2}a^2$

9. $\text{Sin.}\frac{1}{2}D^2 = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(d+e-f)\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(d+f-e)}{\text{Sin. e. Sin. f}}$ (§. 416.).

10. Setzet man in dieser Gleichung die Werthe von Nr. 3, 5, 6, 8, so wird

11. $\text{Cos.}\frac{1}{2}a^2 = \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+B-C)\,\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin. B. Sin. C}}$.

Zusatz: In schiefwinklichten Dreyecken ABD (Fig. 216 und 217.) ist also:

$\text{Cos.}\frac{1}{2}a^2 = \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+B-D)\,\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+D-B)}{\text{Sin. B. Sin. D}}$.

§. 419.

Aufgabe:

Im schiefwinklichten Dreyecke ABD (Fig. 216 u. 217.) aus drey gegebenen Stücken die übrigen drey durch Rechnung finden.

Auflösung:

Von den folgenden zwey Tabellen giebt die erste alle mögliche Fälle, und die zweyte die Auflösungsmethode an.

I. Tabelle.

Aufzählung aller möglichen Aufgaben für schiefwinklichte Dreyecke.

Gegeben sind	Man suchet
I. Eine Seite nebst zwey Winkeln, von welchen eine der Seite gegenüberliegt, oder d, A, B.	1. die Seite a, welche dem andern Winkel gegenübersteht, 2. die anliegende Seite b, 3. den dritten Winkel B;
II. Eine Seite mit den beyden anliegenden Winkeln, oder d, A, B.	1. den dritten Winkel D; 2. eine der beyden übrigen Seiten a, b;
III. Zwey Seiten mit einem opponirten Winkel, oder a, b, A.	1. den andern gegenüberstehenden Winkel D, 2. den eingeschlossenen Winkel B, 3. die dritte Seite b;
IV. Zwey Seiten, mit dem eingeschlossenen Winkel, oder d, b, A.	1. einen der beyden übrigen Winkel B, D; 2. die dritte Seite a;
V. Alle drey Seiten, oder a, b, d.	einen der drey Winkel A, B, D;
VI. Alle drey Winkel, oder A, B, D.	eine der drey Seiten a, b, d.

Die II. Tabelle ist am Ende beygefügt.

§. 420.

§. 420.

Beyspiele zur Uebung und Erläuterung der beyden Tabellen.

I. Beyspiel:

Aus der Seite 84° 36′, dem Winkel 86° 59′, welcher gegenüberliegt, und dem anliegenden Winkel 77° 30′ die beyden übrigen Seiten, und den dritten Winkel suchen.

Auflösung:

1. Es ist für sich klar, daß gegenwärtiges Beyspiel zum 1. Falle der Tabellen gehöre, man bezeichne also

2. die gegebene Seite mit d, oder d = 84° 36′ die gegenüberstehenden Winkel mit D = 86° 59′ den anliegenden Winkel durch A = 77° 30′.

3. Nun ist in der zweyten Tabelle I. Falle Nr. 1:

$$\text{Sin. a} = \frac{\text{Sin. A. Sin. d}}{\text{Sin. D}}$$

log. Sin. A = 9,9895815
log. Sin. d = 9,9980683
compl.d.log.Sin.D = 0,0006022—10

log. Sin. a = 9,9882520 = log.Sin.76° 44

Ferner ist d nebst A spitzig, und D > A, folglich a spitzig (§. 406.), mithin ist

4. die gegenüberstehende Seite a = 76° 44′.

5.

5. Um die anliegende Seite b zu ſuchen dient der I. Fall Nr. 2. der zweyten Tabelle:

$$\text{tang. AH} = \frac{\text{Cos. A. tang. d}}{r}$$

log. Cos. A = 9,3353368
log. tang. d = 11,0244403

$$\log. \frac{\text{Cos. A. tang. d}}{r} = 10,3597771 = \log. \text{tang. AH}$$

$$= \log. \text{tang. } 66^\circ 24'.$$

Da nun A, d beyde ſpitzig, alſo gleichartig ſind, ſo iſt AH ſpitzig, alſo

6. AH = 66° 24'.

$$7. \text{ Sin. DH} = \frac{\text{tang. A. Sin. AH}}{\text{tang. D}}$$

log. tang. A = 10,6542448
log. Sin. AH = 9,9620674
compl. d. log. t. D = 8,7218063—20

log. Sin. DH = 9,3381185 = log. Sin. 12° 35'.

Da wieder a, D ſowohl als A, D ſpitzig, alſo gleichartig ſind, ſo iſt auch DH ſpitzig, mithin

8. DH = 12° 35', und

9. b = AH + DH = 66° 24' + 12° 35' (Nr. 6. u. 8.), oder

10. b = 78° 59'.

11. Den dritten Winkel B zu ſuchen dient der I. Fall Nr. 3. der II. Tabelle.

$$\text{cot. ABH} = \frac{\text{Cos. d. tang. A}}{r}$$

log. Cos. d = 8,9736280
log. tang. A = 10,6542448

log. cot. ABH = 9,6278728 = log. cot. 67°.

A, d ſind beyde ſpitzig, alſo gleichartig, mithin iſt auch ABH ſpitzig, oder

12. ABH = 67°.

$$\text{13. Sin. DBH} = \frac{\text{Cos. D. Sin. ABH}}{\text{Cos. A}}$$

log. Sin. ABH = 9,9640261
log. Cos. D = 8,7212040
compl. d. l. Cos. A = 0,6646632—10

log. Sin. DBH = 9,3498933 = log. Sin. 12° 56'.

Da ferner A, D ſowohl, als a, D gleichartig, alſo DBH ſpitzig iſt, ſo iſt

14. DBH = 12° 56', und

15. B = ABH + DBH = 67° + 12° 56' = 79° 56'.

II. Beyſpiel:

Aus einer Seite 126° nebſt den beyden anliegenden Winkeln 66°, und 120° die übrigen drey Stücke ſuchen.

Auflö-

Auflöſung:

1. Gegenwärtige Aufgabe iſt unter dem zweyten Falle enthalten, man nehme alſo $d = 126°$, $A = 66°$, $B = 120°$.

2. Da letzterer Winkel ſtumpf iſt, ſo iſt ſuppl. $B = 180° - 120° = 60°$, und eben ſo für die ſtumpfe Seite ſuppl. $d = 180° - 126° = 54°$.

3. $\text{cot. ABH} = \frac{\text{Cos. d. tang. A}}{r}$

$\log. \text{Cos. d} = 9{,}7692187$
$\log. \text{tang. A} = 10{,}3514169$

$\log. \text{cot. ABH} = 10{,}1206356 = \log. \text{cot. } 37° 9'$.

4. Nun ſind A, d ungleichartig, folglich ABH ſtumpf, mithin

5. $\text{ABH} = 180° - 37° 9' = 142° 51'$.

6. Da ferner $B < \text{ABH}$, ſo ſind A, D ungleichartig, mithin D ſtumpf, ferner
$\text{DBH} = \text{ABH} - B = 142° 51' - 120° = 22° 51'$.

7. $\text{Cos. D} = \frac{\text{Sin. DBH. Cos. A}}{\text{Sin. ABH}}$

$\log. \text{Sin. DBH} = 9{,}5891897$
$\log. \text{Cos. A} = 9{,}6093133$
$\text{compl. d. l. Sin. ABH} = 0{,}2190323 - 10$

$\log. \text{Cos. D} = 9{,}4175353 = \log. \text{Cos. } 74° 50'$.

8. Mithin $D = 180° - 74° 50' = 105° 10'$ (Nr. 7.)

9.

9. $\text{tang. a} = \frac{\text{Cos. ABH. tang. d}}{\text{Cos. DBH}}$

log. Cos. ABH = 9,9014895
log. tang. d = 10,1387390
compl.d.l.Cos.DBH = 0,0354931—10

log. tang. a = 10,0757216 = tang. 49° 58′.

10. Da nun A, D ungleichartig ſind, und DBH ſpitzig iſt (Nr. 7.), ſo iſt a mit D ungleichartig, alſo ſpitzig; folglich

11. a = 49° 58′.

12. Um die dritte Seite b zu finden, dient der I. Fall Nr. 1, weil nun A, B, a bekannt ſind, es iſt nemlich

Sin. A : Sin. B = Sin. a : Sin. b, alſo

$\text{Sin. b} = \frac{\text{Sin. B. Sin. a}}{\text{Sin. A}}$

log. Sin. B. = 9,9375306
log. Sin. a = 9,8840418
compl.d.l.Sin. A = 0.0392698—10

log. Sin. b = 9,8608422 = log. Sin. 46° 32′.

13. Nun iſt die Seite a ſpitzig, der anliegende Winkel B ſtumpf, und der gegenüberſtehende Winkel $A > 180° - B$, nemlich

$66° > 180° - 120°$; folglich iſt

14. b ſtumpf (§. 409.), alſo

$b = 180° - 46° 32′ = 133° 28°$.

III. Beyſpiel:

Aus den drey Seiten $a = 42^\circ 8'$, $b = 24^\circ 4'$, $d = 30^\circ$ einen Winkel z. B. A ſuchen.

Auflöſung:

1. $a + b - d = 36^\circ 12'$, mithin
   $\frac{1}{2}(a + b - d) = 18^\circ 6'$.
2. $a + d - b = 48^\circ 4'$, alſo
   $\frac{1}{2}(a + d - b) = 24^\circ 2'$.
3. $\log.\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-d) = 9{,}4923083$
   $\log.\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+d-b) = 9{,}6098803$
   $\log. r^2 = 20{,}0000000$
   $\text{compl. dec. log. Sin. } b = 0{,}3895535 - 10$
   $\text{compl. dec. log. Sin. } d = 0{,}3010300 - 10$

   $\log.\text{Sin.}\frac{1}{2}A^2 = 19{,}7927721$ (V. Fall) : 2

   $\log.\text{Sin.}\frac{1}{2}A = 9{,}8963860 = \log.\text{Sin.}51^\circ 58'$
4. Weil endlich $\frac{1}{2}A$ allemal ſpitzig, mithin hier $\frac{1}{2}A = 51^\circ 58'$, ſo iſt
5. $A = 103^\circ 56'$.

Verzeichniß der Druckfehler.

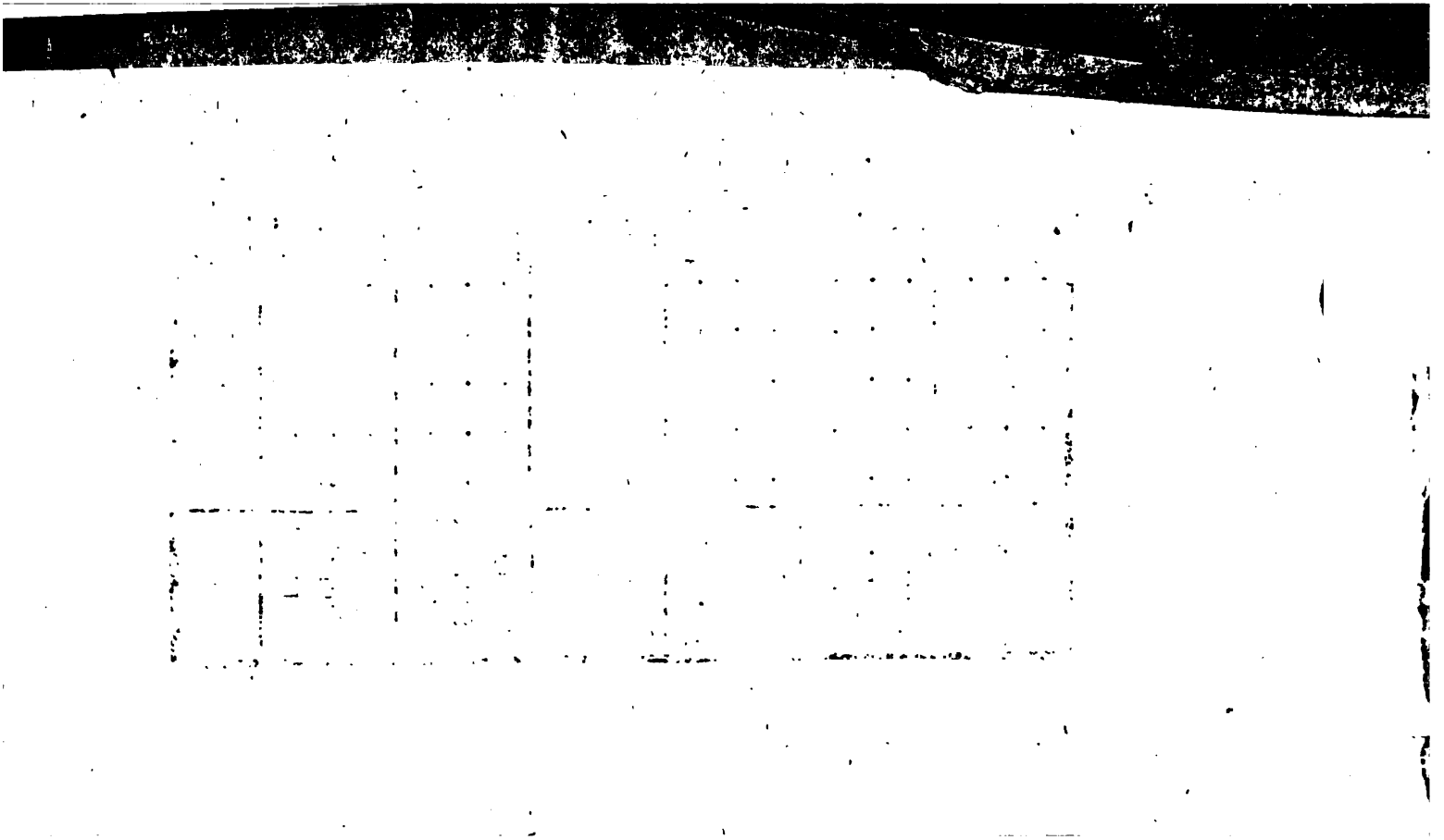
Seite	Zeile	statt	lies
3	10	linia	linea
—	25	Linien die kürzeste	Puncten die kürzeste Linie
5	2	einschränkte	einschränket
17	22	G	C
31	15	ACD<A	ACD>A
42	9	xm	x+m
—	10	+B	AB
46	22	gleich	parallel und gleich
—	23	EF=GH	EF $\overset{\#}{=}$ GH
58	11	$ab^q q$	ab^q
59	4	(§. 53. II. Zuſ.)	(§. 53. III. Zuſ.)
62	19	bin	bis
63	3	dag	das
67	6	zwiſchen den Schenkeln des Winkels ABD muß wegbleiben	
69	8	Nach Centriwinkel muß ſtehen: gleiche Bögē,	
102	10	FG	EG
119	6	(Fig. 87.)	(Fig. 86.)
124	14	$\beta<q$	$\beta>q$
126	15	Keis	Kreis
128	2	ſehr	ſehr wenig
133	2	(§. 230.)	(§. 130.)
143	13	LE—AB^q	LE=AB^q
168	15 u. 16	BCD	BDC
169	24	man DE	man auf DE

Seite	Zeile	statt	lies
175	9	im	ein
187	11	der	die
265	17	deſſen	deren
274	23	PH	PH = PH
280	15	der erſte	der rechte
293	22	$a^2 = A^2$	$a^2 : A^2$
294	13	$\frac{\alpha}{B} \cdot \frac{B^2 - b\sqrt{B}B + b\sqrt{B}b - b^2}{B-b}$	
		lies $\frac{\alpha}{B} \cdot \frac{B^2 - b\sqrt{B}b + B\sqrt{B}b - b^2}{B-b}$	
303	5	$\frac{3}{4} r^3 \pi$	$\frac{4}{3} r^3 \pi$
322	16	(Fig. 135.)	(Fig. 185.)
323	18	(§. 190.)	(§. 290.)
325	14	o—190°	o° bis 180°
326	4	Sin. α Sin. γ	Sin. α = Sin. γ
—	16	$\beta = \alpha = o$	$\beta - \alpha = o$
327	16	(§. 45. II. Zuſ.)	(§. 45. IV. Zuſ.)
342	3	uund Winkeln	und Winkel

Im erſten Theile, oder Arithmetik Seite 462, Zeile 5, ſtatt 15855,232 und 15892,384 lies 15455,232 und 15492,384.

Seite 464, Zeile 25, ſtatt 15892,384, lies 15492,384.

München, gedruckt bey Joſeph Zängl.



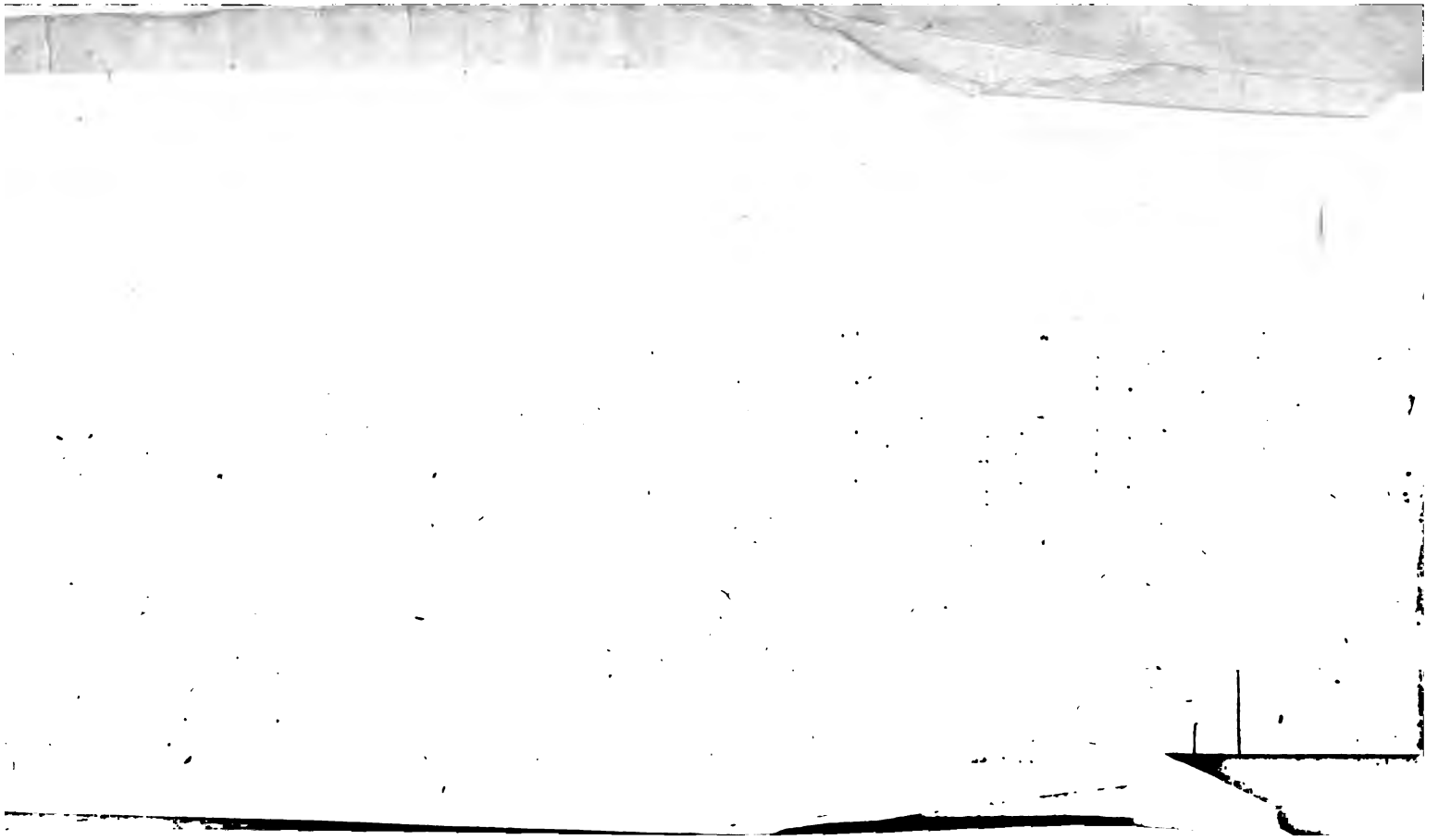
Seit

175
187
265
274
280
293
294

303
322
323
325
326
—
327
342
Im

Sei

—



Se

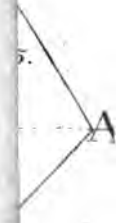
175
187
265
274
280
293
294

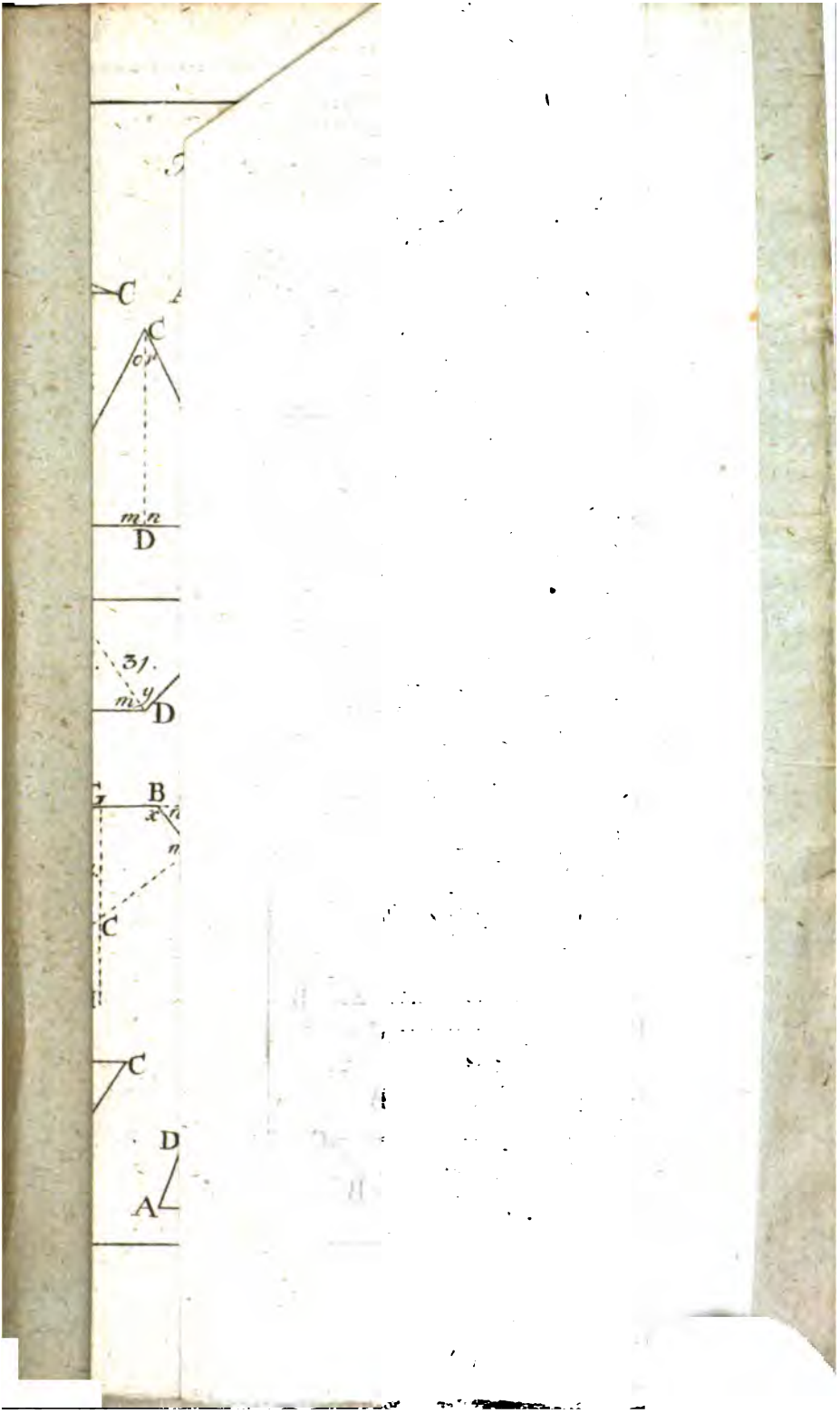
303
322
323
325
326
—
327
342
Im

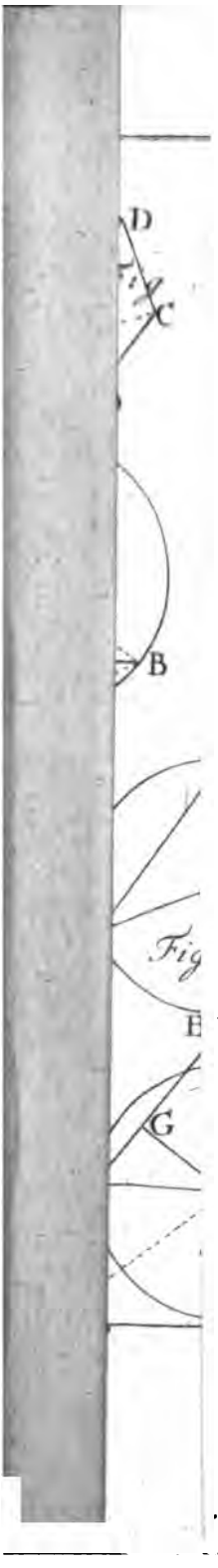
Sei

Fig. 5.

Fig. 11.




C
C
m n
D
31.
m y
D
B
x
n
C
C
D
A


D
C
B
Fig
E
G

A
D
E
B
F
C
A
B
C
C
D

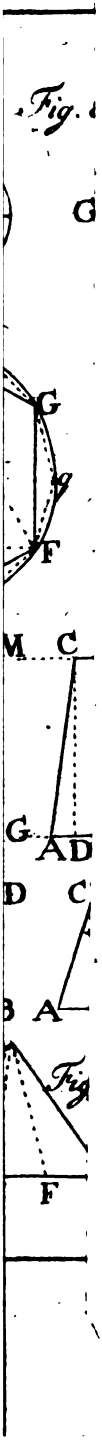
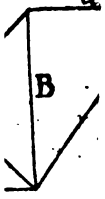
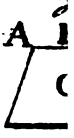


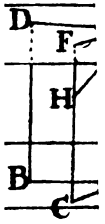
Fig.
G
G
F
M C
G A D
D C
A
Fig
F

Fig. 109.





B



D

Fig.

N

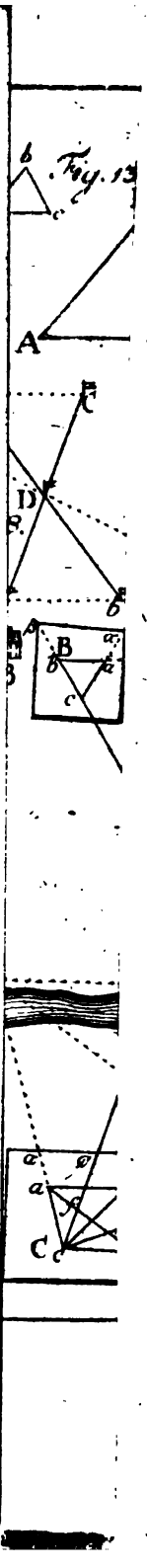
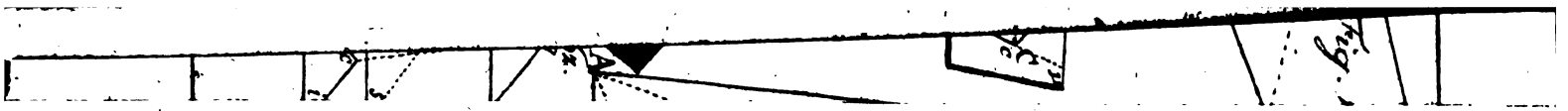
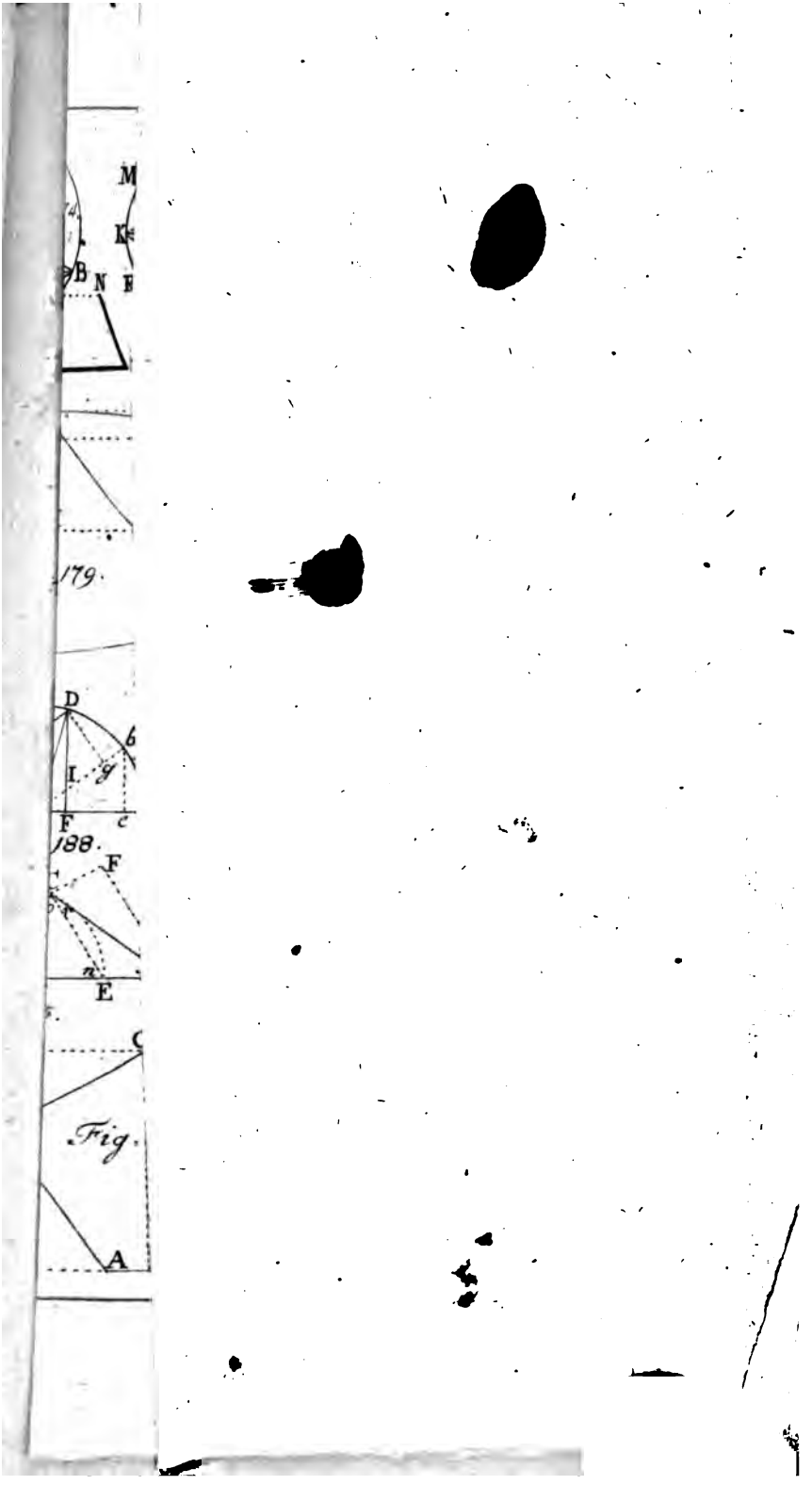
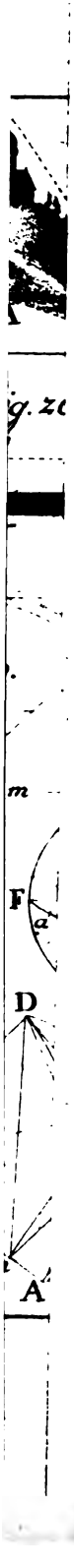


Fig. 13
b
c
A
C
D
B
b
a
c
a
a
C
c




M
K
B
N
E
179.
D
b
I
g
F
c
188.
F
E
C
Fig.
A


m
F
a
D
A